

DOI <https://doi.org/10.32782/2078-0877-2025-25-3-15>

УДК 664 (075.8)

В. В. Дідур¹, д-р техн. наук

ORCID: 0000-0001-7584-5073

О. В. В'юник², інженер

ORCID: 0000-0002-6413-5567

Я. В. Білокін³, аспірант

ORCID: 0009-0003-4510-2780

Є. А. Петриченко¹, канд. техн. наук

ORCID: 0000-0003-1037-077X

¹Уманський національний університет²Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного³Полтавський державний аграрний університет

e-mail: didur.vv@gmail.com

ОСНОВНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ

Анотація. У цій розглядаються фундаментальні закономірності фільтрації рідин у пористих середовищах, аналізується межа застосовності класичного закону Дарсі та обґрунтовуються модифікації для нелінійних режимів. Наведено результати огляду сучасних підходів до опису попередньодарсіанських (pre-Darcy) течій, форсхаймерівських (Forchheimer) моделей та мультифазних процесів. На підставі теоретичного аналізу та синтезу літератури сформульовано задачі вдосконалення моделі фільтрації з урахуванням неньютонівської поведінки рідини та структурних особливостей середовища. Наведено пропозиції щодо подальших досліджень у напрямі чисельної реалізації та верифікації моделей.

Ключові слова: фільтрація, закон Дарсі, нелінійна фільтрація, pre-Darcy, модель Форсхаймера, пористе середовище, в'язкість, модифікована модель.

Постановка проблеми. Класичний закон Дарсі забезпечує лінійну залежність між швидкістю фільтрації та градієнтом тиску, але в реальних геомедіях, особливо в середовищах із низькою проникністю або за малих швидкостей, спостерігаються відхилення від цієї лінійності. Питання: за яких умов і в яких середовищах класичний закон перестає бути застосовним і як побудувати адекватні моделі, що враховують нелінійні ефекти, пористу структуру та реологічні властивості рідини?

Аналіз останніх досліджень. Оглядовий аналіз pre-Darcy-течій у низькопроникних середовищах показує, що за дуже малих градієнтів тиску швидкість нелінійно залежить від градієнту, це явище називають «pre-Darcy flow» [1].

Стаття «Macroscopic non-linear filtration law for porous media» (2025) пропонує макроскопічний нелінійний закон фільтрації у середовищах із неоднорідностями (циліндричні чи сферичні вклучення) [2].

Дослідження «Non-Darcy Seepage Models of Broken Rock Mass Under» демонструє, як коефіцієнти лінійного та квадратичного складників у моделі Форсхаймера змінюються зі змінами градієнту тиску, пористості та градації складу матеріалу [3].

У праці «Critical review on challenges in the application of Darcy's...» розглядаються обмеження розширених форм закону Дарсі, особливо для багатофазних потоків у нафтових резервуарах [4].

Стаття «The Transition from Darcy to Nonlinear Flow in Heterogeneous Porous Media» аналізує переходи між режимами фільтрації і як зі збільшенням швидкості чи неоднорідності середовища виникає нелінійний режим [5].

Дослідження «Flow stability and permeability in a nonrandom porous medium analog» чисельно вивчає зміну «ефективної проникності» з ростом градієнту тиску й утворення нестабільностей потоку [6].

У роботі «A mixed FEM for the coupled Brinkman-Forchheimer/Darcy problem» запропоновано чисельний підхід (метод кінцевих елементів) до зон із різними режимами – Дарсі та Форсхаймера – у неоднорідному середовищі [7].

Стаття «Approximation of Invariant Solutions to the Nonlinear Filtration Equation...» описує аналітичний підхід із використанням модифікованих апроксимацій для розв’язання нелінійного рівняння фільтрації [8].

Дослідження «Non-linear filtration models and the effect of nonlinearity» аналізує експериментальні дані для низькопроникних резервуарів та стверджує, що закон фільтрації може відрізнятися від лінійного Дарсі та моделі з початковим градієнтом [9].

Робота «Darcy’s law of yield stress fluids on a treelike network» демонструє, як модель Дарсі адаптується для рідин із межею зсуву (yield stress) у мережеских пористих структурах [10].

Таким чином, сучасна наука розвиває концепцію нелінійної фільтрації, гібридних законів та багаторежимних підходів, але залишається багато відкритих питань щодо застосування, чисельної реалізації та лабораторної верифікації.

Формулювання мети статті (постановка завдання). Сформулювати узагальнену модель фільтрації, яка враховуватиме перехідний режим між Дарсі та Форсхаймером, можливо, з початковим градієнтом (pre-Darcy), й адаптована під неоднорідне пористе середовище; провести аналіз параметрів моделі на основі даних із літератури й окреслити напрями практичної реалізації (чисельного моделювання, експериментальної перевірки).

Основна частина. Основні закономірності процесів фільтрації.

У разі фільтрації рідини через пористий матеріал із вільною поверхнею об’ємна витрата Q визначається класичним рівнянням Дарсі:

$$Q = k_D F \frac{h+l}{l}, \quad (1)$$

де k_D – експериментально встановлений коефіцієнт фільтрації;

F – площа поперечного перерізу фільтра;

l – його товщина;

h – висота стовпа рідини над фільтром.

Це співвідношення виражає лінійну залежність між швидкістю фільтрації та рушійною силою процесу. У сучасному вигляді рівняння Дарсі часто записують як:

$$-\overline{\text{grad}} p = \frac{\mu}{a} \vec{v}, \quad (2)$$

де μ – динамічна в’язкість фільтруючої рідини;

a – коефіцієнт проникності пористого середовища;

$\vec{v}$ – вектор швидкості фільтрації.

Межі застосовності лінійного закону. Дослідження з кінця XIX – початку XX ст. показали, що лінійний характер залежності швидкості потоку від градієнта тиску не завжди зберігається. Порушення відбуваються як за дуже малих, так і за високих градієнтів тиску, особливо в пористих середовищах зі складною структурою.

У такому разі краще описувати рух рідини нелінійним законом опору:

$$-\text{grad } p = f(v), \quad (3)$$

де $f(v)$ – функція швидкості фільтрації.

Одним із перших наближень була пропозиція Форхгеймера описувати $f(v)$ поліномом другого ступеня:

$$f(v) = av + bv^2, \quad (4)$$

де a і b – експериментальні коефіцієнти.

Це призвело до появи модифікованого рівняння Дарсі:

$$-grad p = \frac{\mu}{a} v + \frac{\rho}{\beta} v^2, \quad (5)$$

де a і β – в'язкісний та інерційний коефіцієнти проникності відповідно.

У безрозмірній формі:

$$C_F = \frac{2}{Re} + 2, C_F = -grad p \frac{\beta}{\rho} \cdot \frac{2}{v^2}; Re = v \frac{a}{\mu} \cdot \frac{\rho}{\beta}, \quad (6)$$

де C_F – приведений коефіцієнт гідравлічного опору;

Re – критерій Рейнольдса.

Варто зазначити, що під час руху в'язкої рідини в пористому середовищі роль характерного розміру відіграє співвідношення між в'язкісним коефіцієнтом і проникністю, тобто величина a або β . Запис закону опору у вигляді формули 6 передбачає, що з достатньою точністю у фільтраційному потоці можна виділити три основні режими (рис. 1а).

Режими фільтраційного потоку:

- 1) в'язкісний (режим Дарсі): $Re < 10^{-2}, C_F \approx \frac{2}{Re}$;
- 2) перехідний: $10^{-2} \leq Re \leq 10^2, C_F = \frac{2}{Re} + 2$;
- 3) інерційний: $Re > 10^2, C_F \approx 2$.

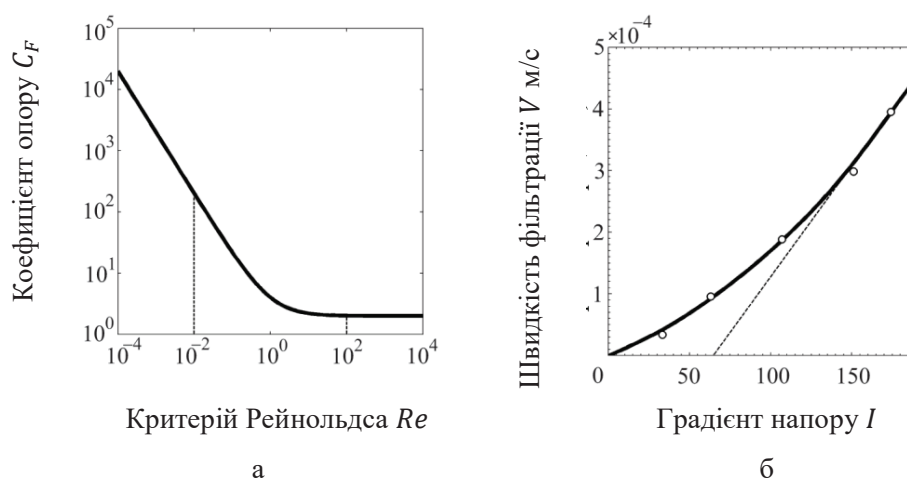


Рис. 1. Відхилення від лінійного закону фільтрації: а) зміна зведеного коефіцієнта опору C_F залежно від числа Рейнольдса Re під час руху в'язкої рідини крізь структуру пористого матеріалу; б) залежність швидкості фільтраційного потоку V від градієнта напору I під час проходження дистильованої води через гідрофільну пористу структуру

На графіку залежності C_F від Re видно зміну режимів: на малих Re опір спадає як $1/Re$, у перехідній зоні додається постійний складник, а на великих – стабілізується.

Друга частина графіка показує, як швидкість фільтрації води зменшується за малих градієнтів тиску, відхиляючись від лінії Дарсі та плавно зникаючи за нульового градієнту.

Моделювання нелінійної фільтрації. Однією з головних причин відхилення від лінійної поведінки є міжмолекулярні взаємодії рідини зі стінками пор. Багато рідин із водневими зв'язками поведуться як тиксотропні середовища, де ефективна в'язкість визначається як:

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\epsilon}}, \quad (7)$$

де τ – напруження зсуву;

$\dot{\epsilon}$ – швидкість деформації зсуву.

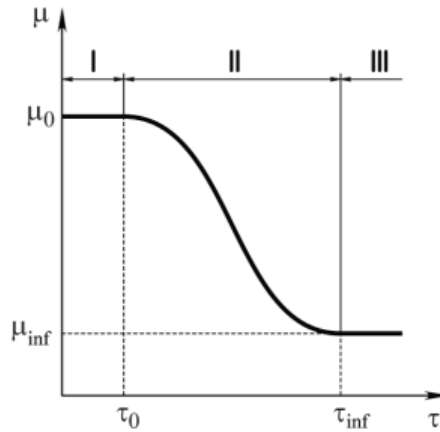


Рис. 2. Зміна ефективної в'язкості μ залежно від величини напруження зсуву τ :
I – ділянка, що характеризується максимальною ньютонівською в'язкістю; II – зона, у якій спостерігається неньютонівська поведінка з варіацією в'язкості; III – область, де в'язкість набуває найменших значень і знову має ньютонівський характер

У зоні малих напружень $\tau < \tau_0$ – в'язкість максимальна.

У проміжній зоні $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_\infty$ – рідина демонструє неньютонівську поведінку.

За високих напружень $\tau > \tau_\infty$ – досягається мінімальна в'язкість.

Графік залежності за нерівностями 8 у координатах $\tau, \dot{\epsilon}$ являє собою пряму лінію, що проходить через початок координат (лінія I на рис. 3). Ньютонівська рідина:

$$\tau = \mu \cdot \dot{\epsilon} \quad (8)$$

Реологічне рівняння для однієї з найпростіших неньютонівських рідин описується степеневим законом. Неньютонівська рідина (степеневий закон):

$$\tau = k_\mu \dot{\epsilon}^n; \quad k_\mu = const; \quad n = const, \quad (9)$$

де $n < 1$ – показник відхилення від ньютонівської поведінки.

Ефективна в'язкість:

$$\mu = k_\mu \dot{\epsilon}^{n-1} \quad (10)$$

Бінгемівська рідина:

$$\tau - \tau_0 = \mu \dot{\epsilon}, \quad (11)$$

де τ_0 – порогове напруження, нижче якого деформація не відбувається.

Шведовська рідина:

$$\frac{\tau - \tau_0}{\tau} = \mu \dot{\epsilon} \quad (12)$$

Така рідина починає текти лише за $\tau > \tau_0$, а її в'язкість швидко падає до постійного рівня. У координатах $\tau, \dot{\epsilon}$ графік залежності 9 також проходить через початок координат, проте має виражено нелінійний характер у діапазоні малих напружень зсуву (лінія II на рис. 3).

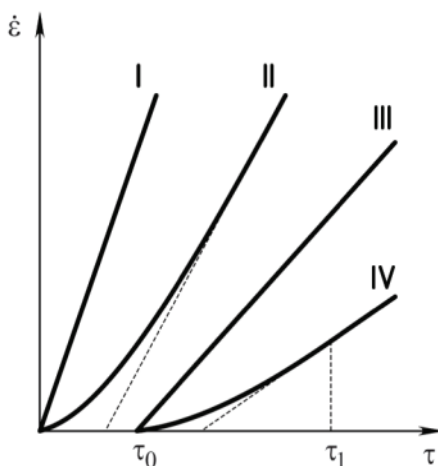


Рис. 3. Характер зміни швидкості деформації $\dot{\varepsilon}$ залежно від напруження зсуву τ :
I – рідина з ньютонівськими властивостями; II – рідина неньютонівського типу;
III – бінгемівська рідина з наявністю граничного напруження; IV – шведівська рідина
з особливою залежністю в'язкості від напруження

Критичні умови фільтрації. Наявність початкового градієнта тиску описується модифікованим законом:

$$\begin{cases} -(grad\ p - \gamma_0) = \frac{\mu}{a} v \text{ при } v > 0; \\ -(grad\ p - \gamma_0) = 0 \text{ при } v = 0, \end{cases} \quad (13)$$

де γ_0 – критичний градієнт тиску.

Також для опису нелінійної фільтрації застосовується поняття R-функції:

$$R = v\sigma \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sqrt{\Pi_{vs}^3}, \quad (14)$$

де Π_{vs} – ефективна пористість.

Коли R перевищує критичне значення R_c , лінійний закон більше не діє, і система переходить до нелінійного режиму.

Перехід від лінійного до нелінійного режиму фільтрації подібний до переходу від ламінарного до турбулентного потоку в класичній гідродинаміці. Однак механізми формування нелінійної поведінки в пористих середовищах відрізняються: вони визначаються мікроструктурою порового простору, міжмолекулярними взаємодіями та тиксотропними властивостями рідини.

Висновки. У роботі проаналізовано основні закономірності фільтраційних процесів у пористих середовищах з акцентом на межі застосовності класичного закону Дарсі. Установлено, що за дуже малих або великих градієнтів тиску, особливо у неоднорідних або малопроникних середовищах, лінійна модель утрачає точність. Представлено модифікації закону фільтрації, зокрема модель Форсхаймера, pre-Darcy-режим, а також реологічні рівняння для неньютонівських рідин, включаючи Бінгемівську та Шведовську моделі. Розглянуто критерії переходу між режимами, роль ефективної в'язкості та вплив структури середовища.

У результаті дослідження обґрунтовано необхідність побудови узагальнених фільтраційних моделей, що враховують нелінійність, критичний градієнт, міжмолекулярні взаємодії та мікроструктуру пор. Запропоновано напрями подальших досліджень, серед яких – чисельне моделювання, лабораторна верифікація та адаптація моделей до різних типів рідин.

Список використаних джерел

1. Teng Y. Review: Pre-Darcy flows in low-permeability porous media. Springer. Hydrogeology Journal, 2024. Vol 32, pages 1957–1977. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10040-024-02853-4>
2. Monchiet V. et al. Macroscopic non-linear filtration law for porous media with inhomogeneities. European Journal of Mechanics – B/Fluids 2025. Vol. 113. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2025.204264>
3. Cao C. et al. Non-Darcy Seepage Models of Broken Rock Mass Under Changed Hydraulic and Porous Structure. Water 2025. volume 17, issue 11.
4. Govindarajan S.K. Critical review on challenges in the application of Darcy's law. Discover Applied Sciences 2025. Vol. 7, Issue 201. DOI: <https://doi.org/10.1007/s42452-025-06632-2025>
5. S. Arbabi M. Sahimi The Transition from Darcy to Nonlinear Flow in Heterogeneous Porous Media. Springer. Transport in Porous Media Vol. 151. P. 795–812.
6. C. Zhao F. Zhang, W. Lou. Flow stability and permeability in a nonrandom porous medium analog. Physics of Fluids. 2024. Vol. 36, Issue 10. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0226562>
7. Caucao S., Discacciati M. A mixed FEM for the coupled Brinkman-Forchheimer. Darcy problem. New York. Cornell University. arXiv. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2301.10135
8. Skurativskyi S., Mykulyak S., Skurativska I. Approximation of Invariant Solutions to the Nonlinear Filtration Equation. arXiv. 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2504.16001. URL: https://www.researchgate.net/publication/391019804_Approximation_of_Invariant_Solutions_to_the_Nonlinear_Filtration_Equation_by_Modified_Pade_Approximants
9. Banerjee A., Jagupilla S.C.K., Pasupuleti S. et al. Alternative relationships to enhance the applicability of nonlinear filtration models in porous media. *Acta Geophys.* 71, 1787–1799 (2023). DOI: <https://doi.org/10.1007/s11600-022-00950-0>
10. Schimmenti V.M. et al. Darcy's law of yield stress fluids on a treelike network. *Phys.Rev.E* 108 (2023) L023102. DOI: 10.1103/PhysRevE.108.L023102

Стаття надійшла до редакції 24.09.2025

Стаття прийнята 15.10.2025

Статтю опубліковано 25.11.2025



V. Didur¹, O. Viunyk², Ya. Bilokin³, I. Petrychenko¹

¹*Uman National University*

²*Dmytro Motorny Tavria State Agrotechnological University*

³*Poltava State Agrarian University*

FUNDAMENTAL REGULARITIES OF FILTRATION PROCESSES**Summary**

This work examines the fundamental laws of fluid filtration in porous media, analyzes the limits of applicability of the classical Darcy's law, and justifies modifications for nonlinear flow regimes. A review of modern approaches to describing pre-Darcy flows, Forchheimer models, and multiphase processes is presented. The paper graphically shows the deviation from the linear law of filtration: the dependences of the change in the reduced resistance coefficient C_F on the Reynolds number Re during the movement of a viscous fluid through the structure of a porous material and the dependence of the filtration flow velocity V on the pressure gradient I when distilled water passes through a hydrophilic porous structure are given. The nature of the change in the strain rate $\dot{\epsilon}$ depending on the shear stress τ : for liquids with different physical properties is also graphically presented. Based on theoretical analysis and literature synthesis, tasks are formulated to improve filtration models by accounting for the non-Newtonian behavior of fluids and the structural features of the medium. Proposals for further research are provided, focusing on numerical implementation and model verification.

Keywords: filtration, Darcy's law, nonlinear filtration, pre-Darcy, Forchheimer model, porous medium, viscosity, modified model.