УДК 514.182.7:519.651 DOI: 10.31388/2078-0877-19-2-271-277

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ ДИСКРЕТНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ

Пихтєєва І. В., к. т. н.,
Івженко О. В., к. т. н.,
Зінов'єва О. Г.
Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного
Тел. (0619) 42-68-62

Анотація **– в роботі розглядається метод розв'язання задач економіко-математичного моделювання виробничих процесів, які виражають залежність результатів виробництва від витрат виробничих факторів. При аналізі попередніх досліджень авторами зазначено, що аналіз ефективності використання ресурсів здійснюється із використанням функції регресії. Але, якщо аналіз ефективності використання ресурсів не є змістом дослідження, то функція регресії може відігравати роль виробничої функції. Пропонований метод оснований на використанні дискретного геометричного моделювання виробничої функції. Для отримання рішення використовується дискретна апроксимація за критерієм дискретного методу найменших квадратів (ДМНК) регресивної моделі виробничої функції (ВФ). Авторами запропоновано кусково-лінійний розв'язок, що має кращий показник критерію.**

Застосування табличного процесора Excel дає проектувальнику можливість економії часу при проведенні обчислень і дозволяє вдосконалити вміння пошуку інформації для вирішення поставленого завдання.

Ключові слова **– корекція, дискретна апроксимація, кусково-лінійна регресія, виробнича функція, метод найменших квадратів, дискретний точковий ряд.**

Постановка проблеми. Виробничі функції отримали значне поширення в економіко-математичному моделюванні виробничих процесів. Вони виражають залежність результатів виробництва від витрат виробничих факторів, наприклад, врожайності - від кількості внесених добрив [1, 3, 4]. Основне призначення виробничих функцій (ВФ) складається у визначенні найбільш доцільного поєднання виробничих факторів з метою одержання максимального значення результативної ознаки при мінімальних витратах виробничих факторів.

Виробничі функції можуть бути представлені дискретним точковим рядом (табличні) або задані (графічно або аналітично). Задачею неперервного аналізу є перехід від дискретної або графічної інформації до неперервної у вигляді аналітичної залежності, що є основною при подальшому оперуванні з ВФ. В даний час при створенні ВФ використовуються методи регресійного і кореляційного аналізу. Існуючі методи неперервного моделювання припускають побудову неперервної моделі, тобто одержання рівняння лінії регресії по заданих дискретних реалізаціях процесу. Такий підхід виправданий тоді, коли потрібно визначити при заданому довільному $x = \bar{x}$ значення результативної ознаки $y = \bar{y}$. Проблема в тому, що у багатьох задачах ціль моделювання полягає по суті в корекції вихідних даних і визначенні значень результативної ознаки при тих же значеннях абсцис, узятих для точок вихідного ряду [1, 3, 4]. У цьому випадку доцільно застосувати дискретний метод найменших квадратів, як при завданні виду апроксимуючої функції (функції регресії) так і без нього. Такі задачі апроксимації довільного точкового ряду дискретним МНК вирішувалися нами раніше без регламентації опуклості ДПК рішення або з регламентацією опуклості. Найкращих результатів апроксимації можна досягти застосуванням кускових або кусково-гладких наближень.

Аналіз останніх досліджень. При побудові регресійних моделей у відповідній літературі припускають нормальний закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) і тому застосовують, як правило, як обчислювальний метод найменших квадратів [1, 2, 7, 8]. У докторській дисертації Найдиша А. В. всебічно досліджені регресійні моделі на основі методів НСВ і НГВ [6]. При цьому враховувалася змістовна сторона моделюємої задачі, що вимагає мінімізації саме зазначених критеріїв і не розглядалась регресійна модель на основі МНК.

Формулювання цілей статті. Метою статті є розробка методу розв'язання задач економіко-математичного моделювання, зокрема при складанні виробничих функцій (ВФ). Розрахунок базової ВФ із метою визначення ефективності використання ресурсів здійснюється за методом ДМНК.

Основна частина. Розглянемо кусково-лінійний розв'язок задачі, запозиченої з [5], по визначенню залежності між вартістю необхідних запасних частин (тис.грн.) і обсягом механізованих робіт (тис. га м'якої оранки) для сукупності 10 приблизно однорідних господарств. Вихідні дані представлені в табл. 1. На рис. 1 представлені вихідні дані і тонкою суцільною лінією проведена пряма лінія регресії, отримана в [5]. Її рівняння

$$y = 0{,}1276x + 14{,}71. \tag{1}$$

Таблиця 1 – Порівняння результатів неперервної прямолінійної і кусково-лінійної дискретної регресії.

i	x	y	Пряма МНК – регресії a_0 = 14,71; a_1 = 0,1276		Кусково–лінійна регресія	
			$\bar{y}$	$\bar{\Delta}$	$\bar{y}$	$\bar{\Delta}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	34	20,0	19,05	+0,95	19,2426	+0,7574
2	45	20,0	20,45	-0,35	20,5308	-0,4308
3	53	20,4	21,47	-1,07	21,4676	-1,0676
4	58	21,6	22,11	-0,51	22,0531	-0,4531
5	70	28,2	23,64	+4,56	23,4584	+4,7416
6	72	21,8	23,90	-2,10	23,6925	-1,8925
7	78	23,8	24,67	-0,87	24,5413	-0,7413
8	87	24,2	25,81	-1,61	25,8143	-1,6143
9	91	25,9	26,32	-0,42	26,3802	-0,4802
10	104	29,4	27,98	+1,42	28,2195	+1,1805
F				33,1754		32,9483

Першим етапом побудови лінії регресії є аналіз вихідних даних і виключення грубих промахів. На перший погляд може показатися, що т.5 $(y = 28{,}2)$ є грубим промахом. Однак статистичний аналіз за критерієм t - Стьюдента показує її значимість. Тому її виключати не можна. Тим більше, що в рішенні [5] для порівняння вона не виключена.

Апроксимуючу криву представимо ламаною лінією зі зламом у т. 6. Рішення будемо проводити відповідно до методики глобального кусково-лінійного наближення [8].

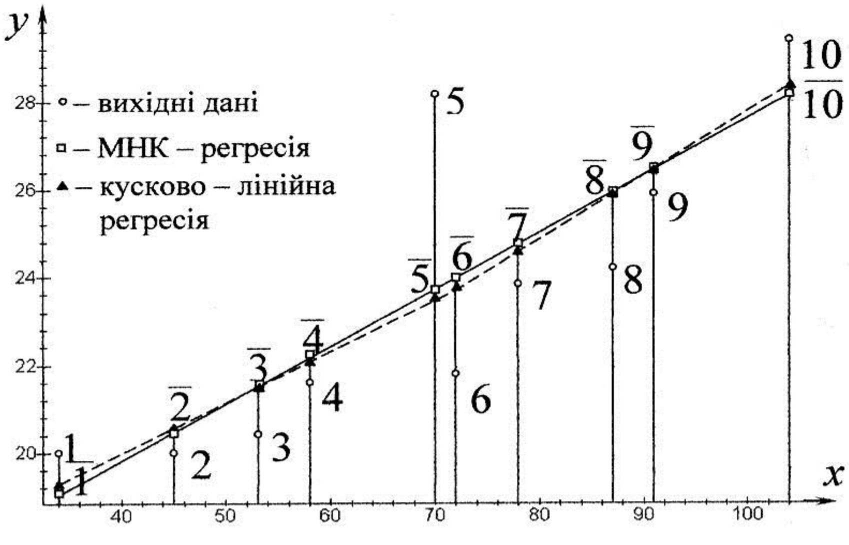

Рис. 1. Лінії регресії виробничих функцій.

Алгоритм.

1. Співвідношення між ординатами точок моделюючої прямої лінії на рівномірній сітці мають вигляд:

$$\overline{y_{i-1}} - \overline{2y_i} + \overline{y_{i+1}} = 0 \ , \quad i = \overline{1; n-1}. \tag{2}$$

Для прямолінійного точкового ряду можна скористатися рекурентним співвідношенням або глобальним співвідношенням:

$$\mathbf{y_k = \delta^1 \sum_{i=1}^{k} h_i + y_0} \ , \quad \boldsymbol{k = \overline{1; n}} \ . \tag{3}$$

виражаючим ординату ***К***-ї точки ряду через значення 1-ї поділеної різниці δ^1 і параметра y_o (ордината початкової точки).

2. Керуючими ординатами виберемо $\overline{y}_1, \overline{y}_6$ і $\overline{y}_{10}$. Скористаємося дискретним представленням прямої лінії і запишемо ординати інших точок у залежності від обраних

$$\overline{y}_k = \overline{y}_1 + \frac{\overline{y}_6 - \overline{y}_1}{x_6 - x_1}(x_k - x_1), \quad k = 2...5 \ ;$$
$$\overline{y}_S = \overline{y}_6 + \frac{\overline{y}_{10} - \overline{y}_6}{x_{10} - x_6}(x_S - x_6), \quad S = 7...9, \tag{4}$$

де y_k ,y_s – ординати відповідно k – ї, та s – ї точки.

3. Цільова функція

$$\begin{aligned} F = {} & (y_1 - \overline{y}_1)^2 + (y_2 - 0,7105\overline{y}_1 - 0,2895\overline{y}_6)^2 + (y_3 - 0,5\overline{y}_1 - 0,5\overline{y}_6)^2 + \\ & +(y_4 - 0,3684\overline{y}_1 - 0,6316\overline{y}_6)^2 + (y_5 - 0,0526\overline{y}_1 - 0,9474\overline{y}_6)^2 + (y_6 - \overline{y}_6)^2 + \\ & +(y_7 - 0,8125\overline{y}_6 - 0,1875\overline{y}_{10})^2 + (y_8 - 0,5313\overline{y}_6 - 0,4687\overline{y}_{10})^2 + \\ & (y_9 - 0,4063\overline{y}_6 - 0,5937\overline{y}_{10})^2 + (y_{10} - \overline{y}_{10})^2 = \min \end{aligned} \tag{5}$$

4. Диференціюється F по кожному з параметрів

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad i = \overline{0; k}, \quad i = \overline{0; S}; \tag{6}$$

5. Розв’язуючи відповідно до алгоритму, визначаємо

$$\overline{y}_1 = 19{,}2426, \quad \overline{y}_6 = 23{,}6925, \quad \overline{y}_{10} = 28{,}2195.$$

6. Тепер розраховуємо ординати інших точок і їхнього відхилення від заданих. Значення критерію ***F*** = 32,9483 краще, ніж при неперервній прямолінійній регресії, де ***F*** = 33,1754. Результуюча

ламана представлена на рис.1 штриховою лінією, результати розрахунків представлені в табл.1.

Розв'язок, як бачимо, і в першому і в другому випадку сильно зміщено убік "точка, що випадає" 5. При її виключенні або застосуванні вагових коефіцієнтів, що нівелюють її вплив на остаточний результат, значення критерію було б значно менше. Ще кращих результатів можна було досягти при кусково - параболічній апроксимації ряду двома параболами, з'єднаними в точці $\bar{6}$.

У економіко-математичній літературі [1, 4] підкреслюється, що функція регресії - це ще не виробнича функція, оскільки вона (функція регресії) відбиває статистичну ситуацію, сформовану на визначений момент часу. Її не можна використовувати для прогнозування і розробки стратегічних питань господарювання, тому що вона не відбиває фактор ефективності виробництва [1]. Функція регресії служить первісним етапом для створення виробничої функції. З цією метою вона піддається корекції по спеціальних алгоритмах [1, 4] доти, поки співвідношення між розрахунковими і фактичними показниками не досягнуть визначеного рівня, після чого вона стає базовою виробничою функцією (БВФ), розрахунки відповідно до якої мають сенс і значення для будь-якого об'єкта сукупності [4]. Процес відшукання значень коефіцієнтів ВФ, а також її аналізу й оцінки називається економіко - статистичним моделюванням [2]. У нашому випадку ВФ є дискретною, її рівняння не відшукується, відшукуються її значення на заданій сітці абсцис. Тому методика корекції функції регресії з урахуванням середньої ефективності по сукупності господарств (підрозділів, напрямків) буде трохи іншою.

Висновки: Коли питання аналізу ефективності використання ресурсів не є змістом дослідження, то функція регресії може відігравати роль виробничої функції. У цьому випадку якісному аналізові отриманих результатів необхідно приділити більше уваги, оскільки вони є відправною точкою для прийняття управлінських рішень по удосконалюванню виробництва.

Література:

1. *Василенко Ю. В.* Математические методы анализа в сельском хозяйстве. Киев: Урожай, 1982. 104 с.

2. *Товма И. П., Косица И. А.* Об одном из способов построения производственной функции // Экономико-математические методы и вычислительная техника в управлении сельскохозяйственным производством. Харьков, 1987. С. 64–69.

3. *Хеди Э., Диллон Д.* Производственные функции в сельском хозяйстве. Москва: Прогресс, 1965. 600 с.

4. Методические рекомендации по определению базисной производственной функции и применению ее для анализа и

планирования сельскохозяйственного производства. Киев: Урожай, 1980. 75 с.

5. *Загайтов И. Б.* Об использовании способа минимальных отклонений в экономических исследованиях // Вестник статистики. 1969. № 7. С. 22–31.

6. *Найдыш А. В.* Решение экономических задач по критерию наименьшей суммы отклонений (НСО) // Науковий вісник Національного аграрного університету. Київ, 1998. Вип. 18. С. 262–266.

7. *Найдыш В. М., Пыхтеева И. В.* Дискретный метод наименьших квадратов // Прикладна геометрія та інженерна графіка Київ: КДТУБА, 1997. Вип. 62. С. 19–22.

8. *Пихтєєва І. В.* Кускова дискретна МНК – апроксимація // Праці Таврійської державної агротехнічної академіі. Мелітополь, 2004. Вип. 4, т. 24. С. 103–109.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

Пыхтеева И. В., Ивженко А. В., Зиновьева О. Г.

Аннотация **– в работе рассматривается метод решения задач экономико-математического моделирования производственных процессов, которые отображают зависимость результатов производства от затрат производственных факторов. При анализе предыдущих исследований авторами отмечено, что анализ эффективности использования ресурсов осуществляется с использованием функции регрессии.**

Применение, при этом, табличного процессора Excel дает проектировщику возможность экономии времени при проведении вычислений и позволяет усовершенствовать умение поиска информации для решения поставленной задачи.

THE DECISION OF TASKS OF ECONOMIC-MATHEMATICAL MODELLING ON THE BASIS OF DISCRETE GEOMETRICAL MODELLING PRODUCTION FUNCTION

I. Pyhteeva, A. Ivzhenko, O. Zinovieva

Summary

In work the method of the decision of tasks of economic-mathematical modeling of productions which display dependence of results of manufacture on expenses of production factors is considered.

At the analysis of the previous researches by authors it is marked, that the analysis of efficiency of use of resources is carried out with use of function of regress.

But, if the analysis of efficiency of use of resources is not the maintenance of research function of regresses can be submitted as production function. The offered method is based on use of discrete geometrical modeling of production function. For reception of the decision discrete approximation by criterion of a discrete method of the least squares (DMLS) of regressive model of production function (PF) is used.

Authors the piecewise-linear decision of a task in view which has the best parameter of criterion is offered.

A technique for solving analysis problems in modeling economic processes is proposed. The use of information technologies contributes to the introduction of modern methods of data analysis and forecasting. A specialist, at the same time, only research work remains - setting the task, assessing the quality of the models obtained. To do this, you must have adequate training in the field of application of computing technology in the construction of economic and mathematical models, data processing and forecasting.

At the same time, using the Excel spreadsheet processor gives the designer the opportunity to save time during the calculations and allows you to improve the ability to search for information to solve the problem.