

УДК 514

DOI: 10.31388/2078-0877-19-2-278-287

СПОСІБ ПОБУДОВИ ДОТИЧНИХ У ВУЗЛАХ СПИРАЛЕПОДІБНИХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ КРИВИХ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ СПЕЦІАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ

Щербина В. М., к. т. н.,
Мацулевич О. Є., к. т. н.,
Коломієць С. М., к. т. н.

Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного
Тел.(0619) 42-68-62

Анотація – у роботі досліджується дискретна інтерполяція неоднозначних дискретно представлених кривих (ДПК) довільної конфігурації в локальній системі координат та глобальне формування вузлових дотичних на основі застосування, для проектування, спеціальної функції, які гарантують відсутність осциляції всього обводу.

Дослідження полягає в виявленні можливості використання неперервного геометричного моделювання на основі спеціальної функції і призначення дотичних у вузлах вихідної ДПК при локальних методах згущення та глобальне призначення дотичних при методах згущення спіралеподібних та замкнених кривих ліній на основі спеціальної функції.

Представлений у роботі спосіб згущення дискретно представлених кривих (ДПК), дозволяє, окрім методів глобальної інтерполяції зазначених кривих, використовувати методику локальної неперервної інтерполяції.

Ключові слова – геометричне моделювання, дискретна інтерполяція, спіралеподібна дискретно представлена крива (ДПК), супроводжуюча ламана лінія (СЛЛ), дотична, спеціальна функція.

Постановка проблеми. Методи геометричного моделювання розділяють на неперервне та дискретне. Застосування неперервного моделювання особливо зручно при розв'язанні траєкторних задач у системах ЧПК, пошуку екстремуму і т. ін. При цьому в пам'яті ЕОМ зберігаються вихідні дані – точки, а точки масиву, що згущається, розраховуються в міру необхідності. Однак, відомі методи не дають повної гарантії відсутності осциляції, передбачити результат на кінцевих ділянках заданого точкового ряду неможливо, а отже, виникає необхідність у корегуванні коефіцієнтів і перерахуванні.

Щоб уникнути громіздких обчислень і великих похибок доцільним є застосування локального методу моделювання з наступним переходом до глобальної системи координат.

Аналіз останніх досліджень. Попередні публікації [1] розглядають можливість використання спеціальної функції як інтерполюючої при моделюванні і керуванні формою замкнених і спіралеподібних ДПК, з орієнтацією на моделювання в системах ЧПК, коли доцільно скористатися саме локальними наближеннями на кожній з ланок СЛЛ у локальній системі координат $O\bar{X}\bar{Y}$, де вісь $O\bar{X}$ збігається з розглянутою ланкою, а початок координат – з початковою точкою ланки, але наведені можливості використання функції не розвинуті.

Формулювання цілей статті. Ціль дослідження полягає в виявленні можливості використання неперервного геометричного моделювання на основі спеціальної функції і призначення дотичних у вузлах вихідної ДПК при локальних методах згущення та глобальне призначення дотичних при методах згущення спіралеподібних та замкнених кривих ліній на основі спеціальної функції.

Основна частина. Застосовуючи неперервну інтерполяцію, неможливо передбачити результат на кінцевих ділянках заданого точкового ряду, а отже виникає необхідність у корегуванні коефіцієнтів і перерахуванні. Щоб уникнути громіздких обчислень і великих помилок доцільним є застосування локального методу моделювання з наступним переходом у глобальну систему координат.

Наші дослідження показали, що при інтерполяції спіралеподібних ДПК з орієнтацією на моделювання в системах ЧПК доцільно скористатися саме локальними наближеннями на кожній з ланок супровідної ламаної лінії (СЛЛ) у локальній системі координат $O\bar{x}\bar{y}$, де вісь $O\bar{x}$ збігається з розглянутою ланкою, а початок координат – з початковою точкою ланки (рис. 1).

У цій системі координат поставленим задачам відсутності осциляції спіралеподібного обводу в цілому і забезпечення гладкого стикування окремих ланок у вузлах ДПК у найбільшій мірі, на нашу думку, відповідає спеціальна функція

$$\bar{y} = (a\bar{x} + b) \cdot \sin \frac{\bar{x}(l_i - \bar{x})}{l_i^2}, \quad (1)$$

де a і b – коефіцієнти, що забезпечують гладке стикування ланок, l_i – довжина ланки $(i-1; i)$ СЛЛ. Очевидно, що при $\bar{x}=0$ і $\bar{x}=l_i$ $\bar{y}=0$, тобто крива проходить через кінцеві точки відрізка.

Визначимо коефіцієнти a і b у припущенні, що у вузлах ДПК деяким чином задані дотичні до майбутнього обводу. Звернемося до рис. 1.

Кути, що складають дотичні до обводу (рис. 1) в точках $i-1$ і i з локальною віссю $O\bar{x}$, є

$$\bar{\beta}_{i-1} = \beta_{i-1} - \alpha_i; \quad \bar{\beta}_i = \beta_i - \alpha_i \quad (2)$$

де α_i і β_i – кути нахилу ланок СЛЛ і дотичних до осі Ox глобальної системи координат.

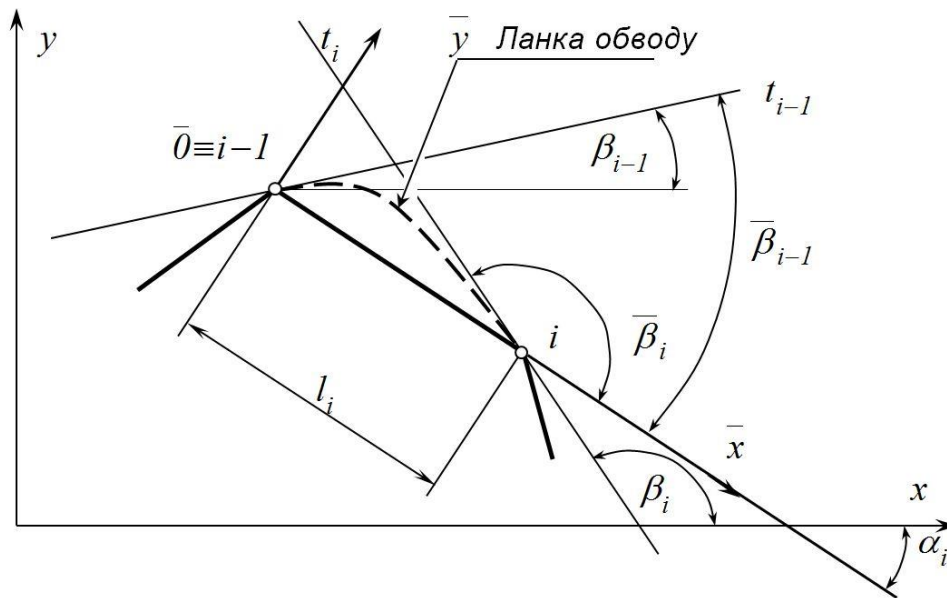


Рис. 1. Положення дотичних до ДПК.

Значення першої похідної \bar{y}'_{i-1} й \bar{y}'_i у локальній системі координат дорівнюють

$$\bar{y}'_{i-1} = \operatorname{tg} \bar{\beta}_{i-1}; \quad \bar{y}'_i = \operatorname{tg} \bar{\beta}_i. \quad (3)$$

Диференціюємо (1) по \bar{x}

$$\bar{y}' = a \cdot \sin \frac{\bar{x}(l_i - \bar{x})}{l_i^2} + (a\bar{x} + b) \frac{l_i - 2\bar{x}}{l_i^2} \cdot \cos \frac{\bar{x}(l_i - \bar{x})}{l_i^2} \quad (4)$$

$$\text{при } \bar{x} = 0: \quad \bar{y}'_{i-1} = \frac{b}{l_i} = \operatorname{tg} \bar{\beta}_{i-1}; \quad b = l_i \operatorname{tg} \bar{\beta}_{i-1}, \quad (5)$$

$$\text{при } \bar{x} = l_i: \quad \bar{y}'_i = \frac{al_i + b}{-l_i} = \operatorname{tg} \bar{\beta}_i. \quad \text{З урахуванням (5) маємо}$$

$$a = -(\operatorname{tg} \bar{\beta}_{i-1} + \operatorname{tg} \bar{\beta}_i). \quad (6)$$

Підставляючи (5) і (6) у (1) маємо рівняння інтерполяційної функції в локальній системі координат

$$\bar{y} = \left\{ (l_i - \bar{x}) \operatorname{tg} \bar{\beta}_{i-1} - \bar{x} \operatorname{tg} \bar{\beta}_i \right\} \cdot \sin \frac{\bar{x}(l_i - \bar{x})}{l_i^2}. \quad (7)$$

Перша похідна описується рівнянням (4) з урахуванням a з (6) і b з (5). Очевидно, що щоб уникнути осциляції кривої дотична в i -ому вузлі повинна розташовуватися так, щоб її кут нахилу β_i задовольняв обмеженням $\alpha_{i+1} < \beta < \alpha_i$. Крім того, функція (7) вимагає додаткових обмежень. Як показали дослідження її графік не осцилює на відрізку $[0; l_i]$, коли $k = \text{tg}\beta_{i-1} / \text{tg}\beta_i$; $k \in [-2; -0.5]$.

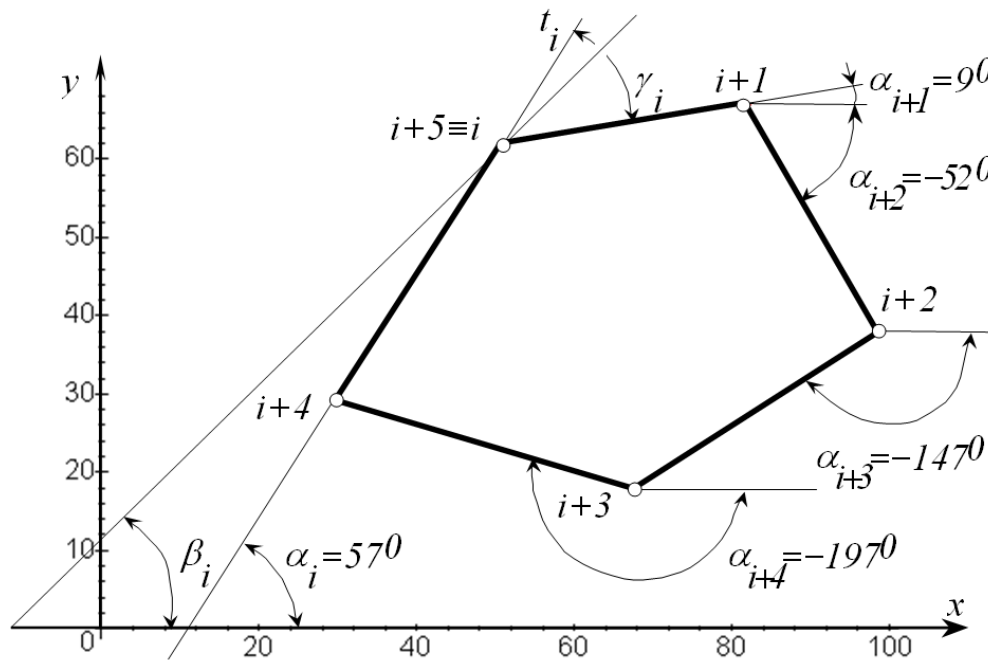


Рис. 2. Призначення кутів суміжності ДПК.

Таким чином, задача формування дотичних у вузлах ДПК зводиться до задачі побудови неосцилюючого дискретного графіка β_l в смузі α_i (рис. 3) з урахуванням обмежень на коефіцієнт k . Уздовж осі Ox відкладаємо довжини ланок $l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$. По суті це розгорнення ДПК, співпадаюче з віссю абсцис. Уздовж осі ординат відкладаємо значення кутів α_i нахилу i -ї ланки до осі Ox . Діапазон, відзначений на графіку, буде визначати значення γ_i . З'єднавши послідовно верхні і нижні границі ділянок, одержуємо смугу кутів суміжності γ_i для заданої ДПК, що визначає область вибору і призначення кутів β_i дотичних у вузлах. Відповідно до отриманого раніше алгоритму [2] формується з урахуванням обмежень на k опуклий графік β_i в смузі γ_i (рис. 3).

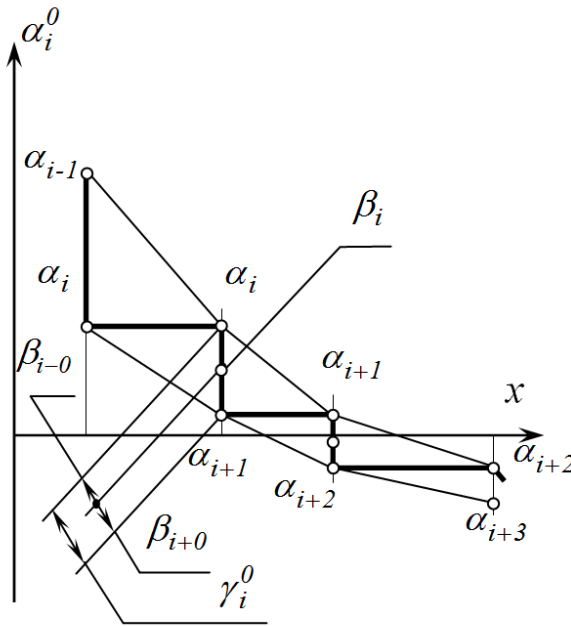


Рис. 3. Побудова дискретного графіка β_i .

Дотична t_i у вузлі i (рис. 4) складає з віссю OX кут β_i , з попередньою ланкою $(i-1, i)$ СЛЛ - кут $\bar{\beta}_{i-0}$, з наступною - кут $\bar{\beta}_{i+0}$.

Тангенси кутів $\bar{\beta}_{i-1+0}$ і $\bar{\beta}_{i-0}$ зв'язані співвідношенням

$$k_i = \frac{\text{tg} \bar{\beta}_{i-1+0}}{\text{tg} \bar{\beta}_{i-0}} ; \text{tg} \bar{\beta}_{i-0} = \frac{1}{k_i} \cdot \text{tg} \bar{\beta}_{i-1+0} \quad (9)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \text{tg} \bar{\beta}_{i+1-0} &= \frac{1}{k_{i+1}} \cdot \text{tg} \bar{\beta}_{i+0}, \\ \text{tg} \bar{\beta}_{i+2-0} &= \frac{1}{k_{i+2}} \cdot \text{tg} \bar{\beta}_{i+1+0}, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

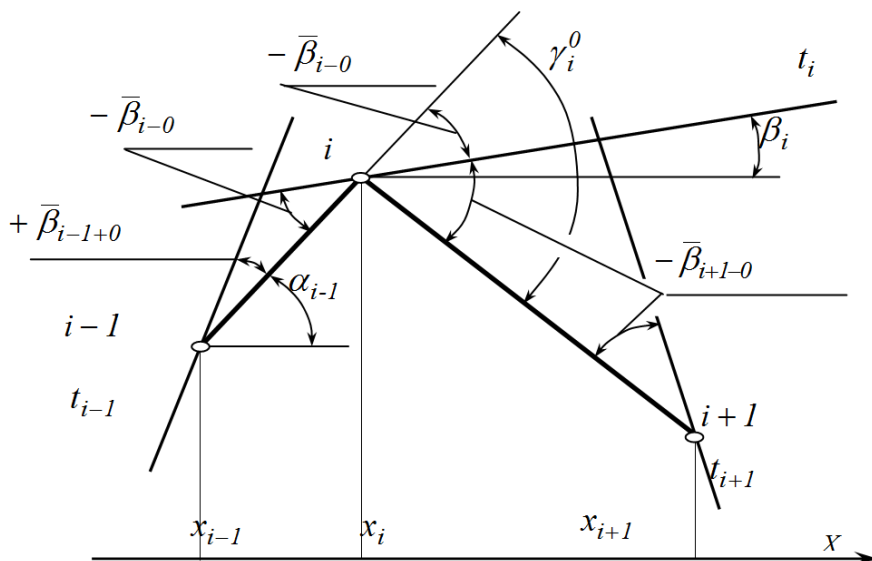


Рис. 4. Область можливого розташування ДПК.

З огляду на те, що

$$\bar{\beta}_{i+0} = \gamma_i^0 + \bar{\beta}_{i-0}, \quad i = \overline{1; n-1} \quad (11)$$

з (10) з урахуванням (11) маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{\beta}_{1-0} &= \frac{1}{k_1} \cdot \operatorname{tg} \bar{\beta}_{0+0}; \operatorname{tg} \bar{\beta}_{2-0} = \frac{1}{k_2} \cdot \operatorname{tg} \bar{\beta}_{1+0} = \frac{1}{k_2} \operatorname{tg} (\gamma_1^0 + \bar{\beta}_{1-0}) \\ \operatorname{tg} \bar{\beta}_{3-0} &= \frac{1}{k_3} \operatorname{tg} (\gamma_2^0 + \bar{\beta}_{2-0}) \dots \text{т.д.} \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидно, що $\bar{\beta}_{i-0} = \beta_i - \alpha_{i-1}$; $\bar{\beta}_{i+0} = \beta_i - \alpha_i$ (8). Стратегія подальшого пошуку множини кутів $\bar{\beta}_{i-0}$ і $\bar{\beta}_{i+0}$, $i = \overline{1; n-1}$ складається в такім призначенні кутів β_i нахилу дотичних, щоб дотримувалися дві умови:

– положення точки β_i в смугі α_i , тобто на відрізку $\alpha_{i-1} \alpha_i$, а саме

$$\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i-1}; \quad (13)$$

– значення кутів $\bar{\beta}_{i-0}$ і $\bar{\beta}_{i+0}$ повинні задовольняти умові (9).

Приведемо співвідношення (12) до кутів β_i на підставі (6). Ураховуючи, що $\gamma_i = \alpha_{i-1} - \alpha_i$, маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\beta_1 - \alpha_0) &= \frac{1}{k_1} \operatorname{tg}(\beta_0 - \alpha_0); \operatorname{tg}(\beta_2 - \alpha_1) = \frac{1}{k_2} \operatorname{tg}(\beta_1 - \alpha_1); \\ \operatorname{tg}(\beta_3 - \alpha_2) &= \frac{1}{k_3} \operatorname{tg}(\beta_2 - \alpha_2) \dots \text{і т.д.} \end{aligned} \quad (14)$$

Для того, щоб звести обмеження (13) і співвідношення (14) у єдину систему, необхідно перейти від тангенсів кутів у (14) до самих кутів. Відомо, що функцію $\operatorname{tg} x$ можна розкласти в ряд Тейлора

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \quad (15)$$

При моделюванні реальних ДПК значення x у радіанах менше одиниці і з кожним наступним кроком згущення наближається до нуля. Крім того, розв'язання системи (13)+(14) полягає не у визначенні точного значення, а у визначенні відрізка, з якого вибирається шукане рішення, що задовольняє заданим умовам. Усе це дозволяє нам у розкладанні (15) обмежитися першим членом, тобто $\operatorname{tg} x \approx x$

Тоді з (14) маємо

$$\beta_1 - \alpha_0 = \frac{1}{k_1}(\beta_0 - \alpha_0); \beta_2 - \alpha_1 = \frac{1}{k_2}(\beta_1 - \alpha_1); \beta_3 - \alpha_2 = \frac{1}{k_3}(\beta_2 - \alpha_2) \dots \quad (16)$$

Перетворимо з урахуванням (13)

$$\alpha_1 < \beta_1 = \frac{\beta_0}{k_1} + \alpha_0 \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) < \alpha_0; \quad \alpha_2 < \beta_2 = \frac{\beta_1}{k_2} + \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{k_2}\right) < \alpha_1; \\ \alpha_3 < \beta_3 = \frac{\beta_2}{k_3} + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{k_3}\right) < \alpha_2 \dots \quad (17)$$

З огляду на те, що $k_i < 0$, а саме $-2 < k_i < -\frac{1}{2}$, (див. [1]), остаточно маємо

$$\alpha_0 < \beta_0 < (1 - k_1)\alpha_0 + k_1\alpha_1; \quad \alpha_1 < \beta_1 < (1 - k_2)\alpha_1 + k_2\alpha_2; \\ \alpha_2 < \beta_2 < (1 - k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 \dots \alpha_{n-2} < \beta_{n-2} < (1 - k_{n-1})\alpha_{n-2} + k_{n-1}\alpha_{n-1} \dots \quad (18)$$

Для того, щоб підключити в систему (17) нерівності, що містять β_{n-1} і β_n , перетворимо ліву частину останньої нерівності з (16)

$$\beta_{n-1} = \beta_n \cdot k_n + \alpha_{n-1}(1 - k_n) \quad (19)$$

З умови $\alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_{n-2}$ маємо ($k_n < 0$) $\alpha_{n-1} < \beta_n \cdot k_n + \alpha_{n-1}(1 - k_n) < \alpha_{n-2}$, або

$$\frac{\alpha_{n-2}}{k_n} + \alpha_{n-1} \left(1 - \frac{1}{k_n}\right) < \beta_n < \alpha_{n-1} \quad (20)$$

$$\text{Аналогічно } \frac{\alpha_{n-3}}{k_{n-1}} + \alpha_{n-2} \left(1 - \frac{1}{k_{n-1}}\right) < \beta_{n-1} < \alpha_{n-2} \quad (21)$$

Система нерівностей (18) + (20) + (21) містить повний набір кутів β_i ($i = \overline{0; n}$) нахилу дотичних. Приведемо отримані обмеження за допомогою (17) до одного невідомого, наприклад β_0 , для чого виразимо всі β_i , $i = \overline{1; n}$, через β_0 , що у даному випадку виступає як керуючий параметр.

$$\alpha_0 < \beta_0 < (1 - k_1)\alpha_0 + k_1\alpha_1; \quad \alpha_1 < \beta_1 = \frac{\beta_0}{k_1} + \alpha_0 \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) < (1 - k_2)\alpha_1 + k_2\alpha_2; \dots \\ \dots \frac{\alpha_{n-2}}{k_n} + \alpha_{n-1} \left(1 - \frac{1}{k_n}\right) < \beta_{n-1} = \frac{\beta_0}{k_1 k_2 \dots k_n} + \frac{\alpha_0}{k_2 k_3 \dots k_n} \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) + \\ + \frac{\alpha_1}{k_3 k_4 \dots k_n} \left(1 - \frac{1}{k_2}\right) + \dots + \alpha_{n-1} \left(1 - \frac{1}{k_n}\right) < \alpha_{n-1}, \quad (22)$$

або

$$\begin{aligned} & \alpha_0 < \beta_0 < (1-k_1) \alpha_0 + k_1 \alpha_1; \\ & \alpha_0(1-k_1) + k_1 \alpha_1 > \beta_0 > \alpha_0(1-k_1) + k_1 \alpha_1(1-k_2) + k_1 k_2 \alpha_2; \dots \\ & \alpha_0(1-k_1) + k_1 \alpha_1(1-k_2) + \dots + k_1 k_2 \dots k_{n-2} \alpha_{n-2} \lesseqgtr \beta_0 \lesseqgtr \alpha_0(1-k_1) + \\ & + k_1 \alpha_1(1-k_2) + k_1 k_2 \alpha_2(1-k_3) + \dots + k_1 k_2 \dots k_{n-1} \alpha_{n-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

В останніх трьох нерівностях знак нерівності в порівнянні з аналогічним з (16) зберігається при n парному і змінюється на протилежний при n непарному.

Система (23) є основною при виборі значення β_0 . Вона складається, як бачимо, із двох множин знакочередуючих обмежень, оскільки $k_i < 0$. Якщо вона має розв'язок, то існує відрізок вибору значення $\beta_0 = \beta'_0$, що забезпечує рішення. Після вибору β'_0 розраховується β_i з (16) при $\beta_0 = \beta'_0$, потім $\bar{\beta}_{i-0}$ і $\bar{\beta}_{i+0}$, $i = \overline{1; n-2}$ і розраховуються функції інтерполяції на кожній з ланок згідно з [3] (18).

$$\bar{y} = \left\{ (l_i - \bar{x}) \operatorname{tg} \bar{\beta}_{i-1} - \bar{x} \operatorname{tg} \bar{\beta}_i \right\} \cdot \sin \frac{\bar{x}(l_i - \bar{x})}{l_i^2}. \quad (24)$$

Очевидно, що, як керуючий параметр, замість β_0 можна із системи (22) з урахуванням співвідношень (21) вибрати будь-який інший параметр β_S , $S \in [1; n-1]$, розрахувати залежність інших β_i , $i = \overline{0; n}$, $i \neq S$, від β_S і одержати обмеження (23), з якого вибрати шукане $\beta_S = \beta'_S$, що забезпечує рішення. Як правило, це зручно, коли ширина смуги (відрізок) вибору β_S мінімальна.

При розв'язанні системи (23) труднощі складаються у виборі значень $k_i \in [-2; -0,5]$. Розв'язання варто починати зі значень $k_i = k = -1$, що приводить до симетрії кривої щодо середини відрізка $\bar{x} \in [0; l_i]$. Якщо при цьому всі нерівності (23) дотримуються, тобто існує відрізок вибору β_0 , то в якості моделюючої кривої можна прийняти обведення, що складається з таких симетричних дуг. Якщо якісь з нерівностей не дотримуються, то необхідно змінити значення $-2 < k_i < -0,5$ в першу чергу тих, котрі беруть участь у всіх некоректних нерівностях. Послідовним підбором коефіцієнтів k можна домогтися дотримання нерівностей і в такий спосіб одержати розв'язок.

Висновки: Приведений спосіб дозволяє використовувати локальні методи неперервної інтерполяції при згущенні ДПК на основі запропонованої інтерполюючої функції з призначенням дотичних в вузлових точках із побудованої смуги кутів суміжності γ_i ,

що забезпечує відсутність осциляції та неперервність перших похідних у точках стикування ділянок кривої, що моделюється, а також глобальне формування дотичних у вузлових точках.

Література:

1. *Верещага В. М., Щербина В. М.* Дискретное моделирование замкнутых кривых / МИМСХ. Мелітополь, 1994. Деп. в ГНТБ України 20.04.94, N 803–Ук94.

2. *Найдиш В. М., Щербина В. М.* Неперервна інтерполяція спіралеподібних ДПК спеціальною функцією // Праці Таврійська державна агротехнічна академія. Мелітополь, 2003. Вип. 4, т. 19. С. 3–6.

3. *Найдиш В. М., Щербина В. М.* Згущення однозначних дискретно представлених кривих // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ, 2003. Вип. 27. С. 22–27.

4. *Найдиш В. М., Щербина В. М.* Формування обводів другого порядку гладкості на основі спеціальної функції // Сучасні проблеми геометричного моделювання: матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. Львів, 2003. С. 83–85.

5. *Щербина В. М.* Дискретное моделирование неоднозначных кривых // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ, 1997. Вип. 61. С. 187–190.

6. *Щербина В. М.* Особливості визначення початкових умов при згущенні спіралеподібних дискретно поданих кривих // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Мелітополь, 2002. Вип. 4, т. 15. С. 97–105.

СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ В УЗЛАХ СПИРАЛЕОБРАЗНЫХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННЫХ КРИВЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Щербина В. М., Мацулевич А. Е., Коломиец С. М.

Аннотация – в работе исследуется дискретная интерполяция неоднозначных дискретно представленных кривых произвольной конфигурации в локальной системе координат и глобальное формирование узловых касательных с применением, для проектирования, специальной функции, что гарантирует отсутствие осцилляции обвода.

Исследование заключается в выявлении возможности использования непрерывного геометрического моделирования на основе специальной функции и назначение касательных в узлах исходной ДПК при локальных методах сгущения и глобальное предназначение касательных при методах сгущения

спиралевидных и замкнутых кривых линий на основе специальной функции.

Представленный в работе способ сгущения дискретно представленных кривых (ДПК) позволяет, кроме методов глобальной интерполяции указанных кривых, использовать методику локальной непрерывной интерполяции.

WAY OF CONSTRUCTION OF TANGENTS IN UNITS SPIRAL DISCRETELY SUBMITTED CURVES WITH USE OF SPECIAL FUNCTION

V. Shcherbina , A. Matsulevych , S. Kolomijets

Summary

The discrete interpolation of the ambiguous discretely submitted curves of any configuration in local system of coordinates and global formation of central tangents with application, for the designing, special function that guarantees absence oscillation contour is investigated in this work.

The study is to identify the possibility of using continuous geometric modeling based on a special function and the purpose of the tangents in the nodes of the original duodenum with local thickening methods and the global purpose of the tangents with thickening spiral-shaped and closed curved lines based on a special function.

The way of a condensation of discretely submitted curves (DSC) submitted in work, allows, except for methods of global interpolation of the specified curves, to use a technique of local continuous interpolation.

In the thickening of the duodenum on the basis of the method proposed in the work, an interpolating function is used with the assigned tangents at the nodal points and with the constructed band of angles γ_i . This method allows the use of local methods of continuous interpolation with thickening of the duodenum based on the proposed interpolating function, ensures the absence of oscillation and continuity of the first derivatives at the junction points of the simulated curve sections, as well as the global formation of tangents at the nodal points. Our studies have shown that when interpolating spiral DPC with a focus on modeling in CNC systems, it is advisable to use local approximations on each of the links of the accompanying broken line in the local coordinate system $O\bar{x}\bar{y}$, where the axis $O\bar{x}$ coincides with the considered link, and the origin is from the starting point link.