УДК 514.182 DOI: 10.31388/2078-0877-19-2-288-293

АПРОКСИМАЦІЯ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЇ КРИВОЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИСКРЕТНОГО МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ З ВАГОВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Пихтєєва І. В., к. т. н.,
Івженко О. В., к. т. н.
Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного
Тел. (0619) 42-68-62

Анотація **– в роботі пропонується застосування вагових коефіцієнтів при апроксимації дискретно представлених кривих методом дискретного методу найменших квадратів (ДМНК), що дозволяє наблизити розв'язок до заданого вузла або віддалити від нього. Отриманий алгоритм дозволяє формувати ДПК на основі будь-якого точкового ряду. При цьому існує можливість покрокового контролю і корекції одержуваного рішення, накладення на нього додаткових умов, гарантується відсутність осциляції.**

Запропонована геометрична схема дозволяє призначати узгоджені характеристики в вузлах ДПК. Параметрами формоутворення є вагові коефіцієнти, що задають положення точок згущення. Схема дозволяє призначати в початкових точках дотичні прямі і формувати одномірні обводи з урахуванням цих характеристик.

Ключові слова **– вагові коефіцієнти, дискретна апроксимація, наближення функції, метод найменших квадратів, відхилення, цільова функція.**

Постановка проблеми. При розв'язанні задач апроксимації на площині, коли треба, щоб апроксимуюча ДПК якомога ближче примикала до деякого значення y_i вихідної ДПК вводять вагові коефіцієнти ρ_i (достатньо велике число) і вирішують МНК - задачу з їх урахуванням. [4]

Складність розв'язання поставленої задачі полягає в виборі значень вагових коефіцієнтів, які забезпечують виконання поставлених вимог. Звичайно, це вирішується [2, 3, 4] шляхом багаторазового розв'язання однієї і тієї ж задачі з послідовною корекцією необхідних значень ρ_i до тих пір, доки умови наближення не будуть виконані.

Розв'язання цієї задачі за алгоритмами дискретного методу найменших квадратів (ДМНК) має деякі особливості.

Аналіз останніх досліджень. Вагові коефіцієнти широко застосовуються у розв'язанні прикладних задач МНК – наближень. [4] Найчастіше розглядається МНК – апроксимація без урахування вагових коефіцієнтів ρ_i; тобто для будь-якої точки вихідної ДПК вони дорівнюють одиниці ρ_i=1. Такий розгляд не враховує пріоритетних якостей окремих значень, тобто передбачається, що вони усі рівноправні. [1, 5, 7] У геодезії [2, 3] розглядаються окремо два випадки:

– рівноточні виміри, коли ρ_i=1;

– нерівноточні виміри з вагами ρ_i; причому деякі з них можуть дорівнювати одиниці.

Постановка завдання. Корекція розв'язку задачі тестової ДПК з застосуванням вагових коефіцієнтів при ДМНК – апроксимації.

Основна частина. Розглянемо розв'язання задачі для тестової ДПК на рівномірній сітці (див. таблицю), в якості апроксимуючої ДПК виберемо 2 – параболу і знайдемо її точки за алгоритмом ДМНК без врахування вагових коефіцієнтів, керуючими точками наближення оберемо точки 1, 2, 3, тобто ординати $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2$. При цьому дискретні представлення апроксимуючої функції, як і співвідношення ординат $\tilde{y}_i$ її точок від керуючих параметрів [1, 5, 6, 7] не змінюються. Із аналізу розв'язку [6] за алгоритмом ДМНК [1] на основі дискретних представлень алгебраїчних поліномів (третій і четвертий рядок таблиці) побачимо, що всі відхилення приблизно однакові, за виключенням точки 1, де $\tilde{\Delta}_1 = 0{,}3213$, приблизно в 2 рази більше ніж інші.

Вирішимо цю задачу ще раз, призначивши ρ_1=5, а інші ρ_i=1, i =0; 2; 3; 4; 5.

Залежності ординат точок апроксимуючої 2 – параболи від параметрів $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$ [6] визначаються за формулами:

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_0 &= 3\bar{y}_1 - 3\bar{y}_2 + \bar{y}_3, \\
\bar{y}_4 &= \bar{y}_1 - 3\bar{y}_2 + 3\bar{y}_3, \\
\bar{y}_5 &= 3\bar{y}_1 - 8\bar{y}_2 + 6\bar{y}_3.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Цільова функція $F = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdot \left(y_i - \bar{y}_i\right)^2 = min$ має вигляд:

$$F=(y_0-\overline{3y_1}+3\overline{y}_2-\overline{y}_3)^2+5(y_1-\overline{y}_1)^2+(y_2-\overline{y}_2)^2+(y_3-\overline{y}_3)^2+$$
$$+(y_4-\overline{y}_1+3\overline{y}_2-3\overline{y}_3)^2+(y_5-3\overline{y}_1+8\overline{y}_2-6\overline{y}_3)^2.$$

Диференціюючи за параметрами $\overline{y}_1, \overline{y}_2$ і $\overline{y}_3$, маємо систему нормальних рівнянь

$$24\overline{y_1}-36\overline{y_2}+24\overline{y}_3=3y_0+5y_1+y_4+3y_5=21,$$
$$-36\overline{y_1}+83\overline{y_2}-60\overline{y}_3=-3y_0+5y_2-3y_4-8y_5=3,$$
$$24\overline{y_1}-60\overline{y_2}+47\overline{y}_3=y_0+y_3+3y_4+6y_5=19, \qquad (2)$$

вирішуючи яку знаходимо значення керуючих параметрів

$$\overline{y}_1=2{,}8557, \quad \overline{y}_2=4{,}1483, \quad \overline{y}_3=4{,}2417.$$

Ординати інших точок з (1) дорівнюють

$$\overline{y}_0=0{,}3639, \quad \overline{y}_4=3{,}1359, \quad \overline{y}_5=0{,}8309.$$

Відхилення точок апроксимуючої ДПК від вихідної ДПК подані в останньому (6) рядку таблиці 1.

Значення критерію $F=0{,}28072$

В табл. 1 та на рис. 1 наведено порівняльні показники апроксимуючої 2-параболи без вагових коефіцієнтів і з ваговими коефіцієнтами.

Таблиця 1 – Порівняльні показники апроксимуючої 2-параболи

i	0	1	2	3	4	5	F	Примітки
y	0	3	4	4	3	1	-	-
$\tilde{y}$	0,1768	2,6787	4,0014	4,1429	3,1076	0,8927	0,1785	-
$\tilde{\Delta}$	–0,1784	**0,3213**	0,0014	–0,1429	–0,1076	0,1073	0,1786	Відхилення без вагів
$\overline{y}$	0,3639	2,8557	4,1483	4,2417	3,1359	0,8309	-	-
$\overline{\Delta}$	–0,3639	**0,1443**	–0,1483	–0,2417	–0,1359	0,1691	0,2807	Відхилення з вагами

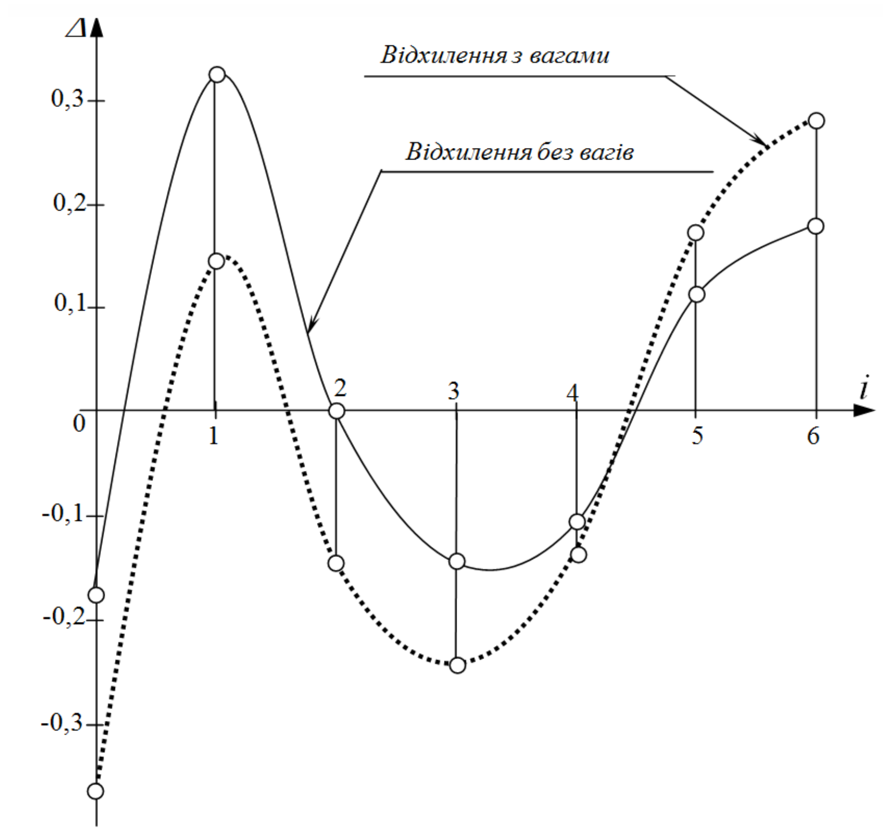

Рис.1. Порівняльні показники апроксимуючої 2-параболи.

Як бачимо, введення вагового коефіцієнту $\rho_i = 5$ в точці 1 змінило відхилення з $0{,}3213$ до $0{,}1443$. При цьому в інших точках показники теж змінилися, як і значення F, що збільшилось $F = 0{,}28072 > 0{,}17857$. Причина - наближення т. $\overline{1}$ розв'язку і вихідної т. 1. Ще більш яскраво виглядатиме це явище, коли значення ρ_1ще збільшити.

Висновки. Важливим важелем корекції розв'язку є застосування вагових коефіцієнтів при ДМНК – апроксимації. Введення коефіцієнтів дозволяє наблизити розв'язок до заданого вузла або віддалити від нього. Значення критерію F розраховується за формулою $F = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdot \left(y_i - \bar{y}_i \right)^2$. Чим більше значення коефіцієнта ρ_1, тим ближче розв'язок до заданої точки. При цьому значення F у порівнянні з випадком, коли ρ_i=1, буде більше.

Література:

1. *Найдыш В. М., Пыхтеева И. В.* Дискретный метод наименьших квадратов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ, 1997. Вип. 62. С. 19–22.

2. *Шилов П. И.* Способ наименьших квадратов. Москва: Геодезиздат, 1941. 48 с.

3. *Чеботарев А. С.* Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. Москва: Геодезиздат, 1958. 606 с.

4. *Успенский А. Б., Федоров В. В.* Вычислительные аспекты метода наименьших квадратов при анализе и планировании регрессионных экспериментов. Москва: МГУ, 1975. 116 с.

5. *Пихтєєва І. В.* Кускова дискретна МНК – апроксимація // Праці Таврійського державного агротехнічного академії. Мелітополь, 2004. Вип. 4, т. 24. С.103–109.

6. *Пыхтеева И. В.* Метод квадратичного программирования в задаче дискретной выпуклой полиномиальной аппроксимации по методу наименьших квадратов // Труды Таврической государственной агротехнической академии. Мелитополь, 1999. Вып. 4, т. 5 С. 86–89.

7. *Пихтєєва І. В.* Залежність значень елементів матриці нормальних рівнянь від вибору керуючих точок в ДМНК – апроксимації // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків, 2005. Вип. 10. С. 16-21.

АППРОКСИМАЦИЯ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЙ КРИВОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ВЕСОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пыхтеева И. В., Ивженко А. В.

Аннотация **– в работе предлагается применение весовых коэффициентов при аппроксимации дискретно представленных кривых методом дискретного метода наименьших квадратов (ДМНК), что позволяет приблизить решение до заданного узла или отдалить от него.**

Предложенная геометрическая схема позволяет назначать согласованные характеристики в узлах ДПК. Параметрами формообразования являются весовые коэффициенты, задающие положения точек сгущения. Схема позволяет назначать в исходных точках касательные прямые и формировать одномерные обводы с учётом этих характеристик.

APPROXIMATION WITH WEIGHT FACTORS BY CRITERION OF A DISCRETE METHOD OF THE LEAST SQUARES (DMLS)

I. Pyhteeva, A. Ivzhenko

Summary

At designing the productions causing use of modern methods of construction of form-building surfaces of the complex geometrical form, there is a necessity for development of alternative methods and algorithms of their reception. At computer realization of tasks of construction of complex surfaces it is extremely necessary to have adequate algorithms of construction of flat contours of sections of projected surfaces.

Discrete computer modeling of surfaces complex geometrical provides forms of applications of original methods of reception of flat contours of surfaces which are projected. One of such methods is the method approximation discretely submitted curves by concrete criterion.

In work application of weight factors is offered at approximation of discretely submitted curves by a method of a discrete method of the least squares (DMLS) that allows to approach the decision up to the set unit or remove from him.

The resulting algorithm allows to form the WPC on the basis of any point series. At the same time, there is the possibility of step-by-step control and correction of the resulting solution, the imposition of additional conditions on it, the absence of oscillations is guaranteed.

The proposed geometric scheme allows you to assign consistent characteristics in the nodes of the WPC. Forming parameters are weighting factors that define the positions of the condensation points. The scheme allows assigning tangent lines at the source points and forming one-dimensional contours taking these characteristics into account.

The formation of flat one-dimensional contours with the provision of control of differential-geometric characteristics makes it possible to simulate surfaces of complex shape according to specified conditions.