



DOI: 10.32782/2078-0877-2024-24-1-14

УДК 514.182

В. В. Ванін<sup>1</sup>, д-р. техн. наук ORCID 0000-0001-7008-7269С. В. Залевський<sup>1</sup>, канд. техн. наук ORCID 0000-0002-7411-1462О. О. Голова<sup>1</sup>, канд. техн. наук ORCID 0000-0001-6984-8673М. В. Грубич<sup>1</sup>, аспірантка ORCID 0009-0003-9056-3826Ю. В. Лазарчук-Воробйова<sup>1</sup>, ст. викл. ORCID 0000-0002-7866-3299

*Національний технічний університет України “Київський  
політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”*

e-mail: zalsergkpi@gmail.com, тел: 067-810-18-84

## ПРО ОДИН СПОСІБ ПОБУДОВИ МОДЕЛІ ЧЕБИШЕВСЬКОЇ СІТКИ НА ПОВЕРХНІ

*Анотація.* В статті запропоновано спосіб побудови моделі сітки Чебишева на нерозгортній поверхні. Побудова первинної лінії чебишевської сітки виконується шляхом послідовного перепроєкціювання. Для моделювання сітки запропоновано скористатись лінійчатою розгортною поверхнею -торсом, яка огортає задану вздовж знайденої геодезичної. Для побудови твірних використовується сферичне відображення геодезичної лінії на одиничну сферу. Напрямки твірних знаходяться за допомогою стереографічної проєкції сфери на площину. Побудовані на торсовій поверхні квадрати відображаються в чарунки сітки на заданій поверхні. Вузлові точки сітки на поверхні будуються за допомогою алгоритму знаходження відстаней до поверхні з наперед заданою точністю. Остаточне знаходження вузлових точок проводиться із застосуванням алгоритму коригування довжин чарунок сітки. Далі приймаємо отримані вузли як точки геодезичної - нової початкової лінії для побудови наступної полоси чарунок. Побудована модель чебишевської сітки дасть можливість використати алгоритми і програми автоматизованого розкрою матеріалу для складних нерозгортних поверхонь.

*Ключові слова:* сітка Чебишева, геодезична, сферичне відображення.

*Постановка проблеми.* Широке впровадження в машинобудуванні композитних матеріалів на тканинній основі, властивості яких залежать від розташування волокон на одягаємій поверхні потребує моделювання на ній сітки Чебишева. Вибір оптимальної моделі має базуватись на властивостях тканини, зокрема гранично допустимій величині кута між нитками основи та уток і властивостях самої поверхні. Актуальною задачею є розробка алгоритмів і програм для автоматизованого розкрою матеріалу з метою одягання складних поверхонь.



*Аналіз останніх досліджень.* В роботі [6] розглядається питання використання чебишевських сіток для структуризації та подальшого створення об'ємно-просторових форм сучасного одягу. Розглянуте питання «одягання» криволінійних поверхонь тканинами та особливості побудови розгортки в залежності від виду та товщини тканини. В роботі оцінюється показник зміни сітьового кута та запропоновано методи фіксації кількох частин тканини для закріплення його значення.

В роботі [8] проведені практичні дослідження, щодо дії зовнішніх навантажень на зміни сітьового куту у різних видів тканини, що дає змогу регулювати початкову величину кроку геодезичної лінії на поверхні.

Стаття [15] присвячена розгляду обчислювального підходу до проектування дротяних сіток, в якому порівнюється їх матеріальні властивості з геометричною моделлю чебишевських сіток. Побудована схема оптимізації проектування. Наведено алгоритм, який дозволяє збалансувати обмеження матеріалу, який використовується з геометричними цілями дизайну які можуть визначатись користувачем під час інтерактивної сесії дизайну.

В роботі [17] було проведено аналіз геометрії у вузлах у представлених чотирикутних конструкціях смуг з вузлами без кручення при моделюванні архітектурних форм.

У статті [21] запропоновано обчислювальний підхід до проектування дротяної сітки який оснований на використанні конморфного відображення, що дозволяє підняти 2D-мозаїку над 3D-направляючою поверхнею.

В наведених роботах зроблено детальний геометричний аналіз окремих етапів побудови моделі чебишевської сітки, розглянуті властивості матеріалів, які використовуються та запропоновані варіанти обчислювального підходу до проектування. Однак не запропоновано цілісного алгоритму моделювання чебишевської сітки на складних поверхнях який передбачав би можливість корегування чарунок сітки при її моделюванні.

*Формулювання цілей статті (постановка завдання).* Розробити алгоритм побудови чебишевської сітки на складних нерозгортних поверхнях. Запропонувати механізми для створення алгоритмів та програм для корегування точності побудови в залежності від властивостей тканини та самої поверхні. Об'єднати алгоритми послідовного перепроєкціювання, корегування довжин сторін чарунок сітки та математичні моделі побудови сферичного відображення, використання стереографічної проекції у єдиний спосіб побудови моделі для розробки алгоритмів та програм для подальшої автоматизації процесу засобами САПР.



*Основна частина.* Нехай в точці  $M_1$  поверхні  $F$  задано вектор  $\vec{a}_1$  розташований в дотичній до поверхні площині  $\Sigma$ . Будемо вважати напрямком цього вектора початковим для побудови геодезичної, як першої лінії моделі чебишевської сітки на поверхні. Скористаємося методом послідовного перепроєкціювання [1]. Щоб урахувати властивості поверхні і характеристики тканини використаємо формулою знаходження довжини кроку [2]:

$$L = 2R_{кр} \cdot \cos \frac{\alpha_{кр}}{2},$$

де  $\alpha_{кр}$  – гранично допустиме значення кута між нитками основи та утку тканини,  $R_{кр}$  – найменший радіус кривини.

Для побудови моделі чебишевської сітки на поверхні  $F$  пропонується використати огинаючу розгортну поверхню, побудовану вздовж знайденої геодезичної кривої  $f$  [1] як первинної лінії чебишевської сітки. Чебишевська сітка задається двома сімействами геодезичних ліній які при відображенні сітки з поверхні на площину переходять у прямі лінії. Тоді побудова чебишевської сітки на розгортній поверхні зводиться до побудови квадратних відсіків на її розгортці.

Твірні лінійчатої розгортної поверхні, яка огинає задану  $F$  вздовж кривої  $f$  визначаються напрямками  $\vec{t}_i$ , спряженими з напрямками  $\vec{a}_i$ . Для їх визначення необхідно побудувати індикатрису кривини у кожній точці  $M_i$ , що викликає значні труднощі. Для спрощення знаходження спряжених напрямків використаємо сферичне відображення геодезичної лінії  $f$  на одиничну сферу.

В кожній із отриманих точок  $M_1, M_2, \dots, M_n$  кривої  $f$  знаходимо одиничний вектор нормалі  $\vec{n}_i$  до поверхні  $\Sigma$  і відкладаємо його від спільного початку – точки  $C(0,0,1)$ . Кінці цих векторів визначають на поверхні сфери точки  $M_1', M_2', \dots, M_n'$  з координатами

$$x_{M_i'} = n_{ix}, y_{M_i'} = n_{iy}, z_{M_i'} = n_{iz} + 1,$$

де  $n_{ix}, n_{iy}, n_{iz}$  координати одиничного вектора нормалі до поверхні  $\Sigma$  у точці  $M_i$ .

Для знаходження напрямків  $\vec{a}'_i$  - сферичних відображень векторів  $\vec{a}_i$  скористаємось стереографічною проекцією сфери на площину [3].

Так як всі точки сфери є омбілічними, то напрямки  $\vec{t}'_i$ , спряжені до  $\vec{a}'_i$  знаходимо як розташовані в дотичних площинах перпендикулярні до  $\vec{a}'_i$ .

Напрямки твірних  $\vec{t}_i$  розгортної поверхні в точках  $M_i$  кривої  $f$  на поверхні  $F$  будуть паралельні знайденому напрямку  $\vec{t}'_i$  у відповідних точках  $M_i'$  на сфері.

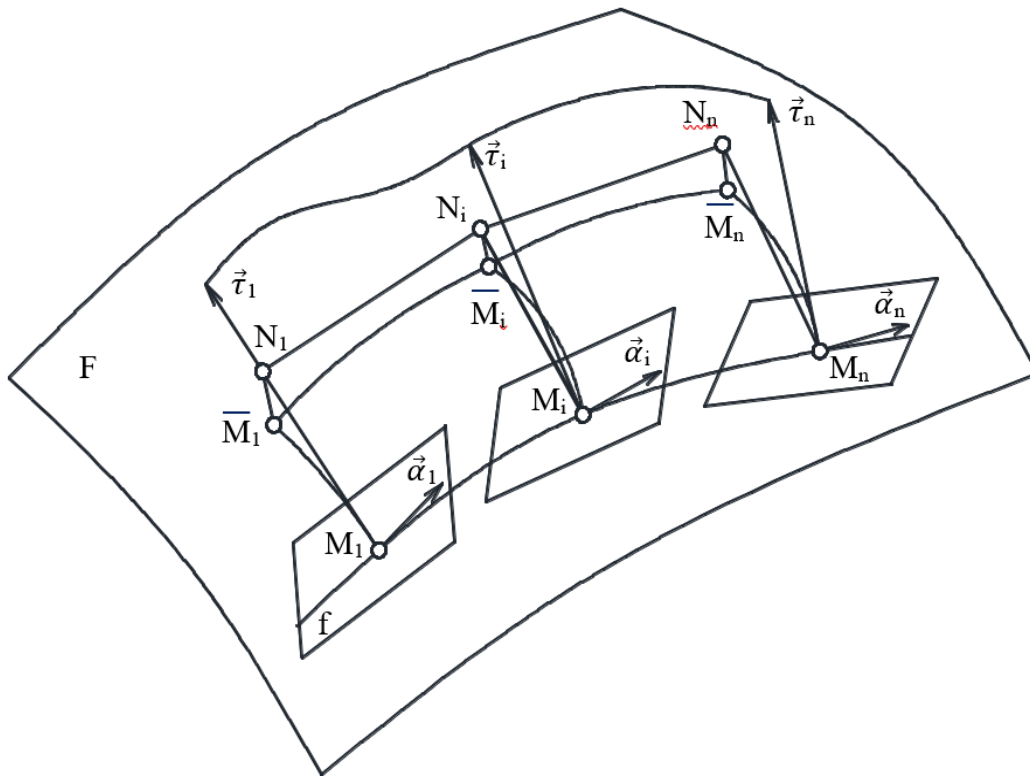


Рис. 1. Побудова полоси чарунок чебишевської сітки на поверхні

Побудуємо розгортку отриманої поверхні і нанесемо на ній полосу із квадратів  $M_i N_i N_{i+1} M_{i+1}$  зі стороною  $L$ , кожен із яких будується від відомої сторони  $M_1 M_2, M_2 M_3, \dots, M_{n-1} M_n$  (Рис. 1).

Для побудови вузлових точок чебишевської сітки на поверхні  $F$  скористаємося алгоритмом пошуку відстані  $d$  від знайдених точок  $N_i$  до поверхні  $F$ . Відстань  $d$  будемо шукати як мінімум функціоналу  $I = \min(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$  при рівнянні зв'язку  $F(x_p, y_p, z_p) = 0$  [4]. Ітераційний процес закінчується за умови  $d^{(n)} - d^{(n-1)} \leq \varepsilon$ , де  $d^{(n)}$  та  $d^{(n-1)}$  – значення, отримані при виконанні останніх ітерацій, а  $\varepsilon$  – вказана точність побудови.

Для остаточного знаходження вузлових точок чебишевської сітки доцільно застосувати спосіб корегування чебишевської сітки [5].

Таким чином, в результаті отримуємо полосу чарунок моделі сітки на поверхні. Приймаючи нові точки як нові  $M_1, M_2, \dots, M_n$  кривої  $f$  повторюємо вищезгадані побудови.

*Висновки.* В роботі запропоновано геометричні основи створення алгоритму практичної побудови моделі сітки Чебишева на складних криволінійних поверхнях засобами САПР для подальшого автоматизованого розкрою викрійок для одягання поверхонь складних геометричних форм.

*Список використаних джерел*

1. Ванін В.В., Залевський В.Й. Побудова геодезичних ліній на поверхні, *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1994. № 56. С. 56-57.
2. Ванін В. В., Залевський С. В. Вибір довжини сторони чарунки сітки Чебишева в залежності від властивостей тканини і поверхні. / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2008. № 79. С. 16–19.
3. Залевський С. В. Геометричне моделювання тканинних наповнювачів текстолітових конструкцій технічних виробів : автореф дис ... канд. техн. наук : 05.01.01 / С. В. Залевський. Київ: КНУБА, 2011. 23 с.
4. Залевський С. В. , Мацулевич О. Є, Мацулевич А. Е, Литвиненко П. Л Оцінка точності моделювання сіткою Чебишева поверхні, заданої упорядкованим каркасом точок. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2014. Вип. 4, т. 58. С. 71–74.
5. Залевський С. В. Про один спосіб корегування чебишевської сітки під час її побудови. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1997. № 62. С. 226–228.
6. Колосніченко О. В. Удосконалення дизайн-ергономічного проектування жіночого одягу сучасних форм. *Теорія та практика дизайну*. 2015. № 8. С. 134-144. <https://doi.org/10.18372/2415-8151.8.10482>.
7. Кардаш О. Теорія формотворення елементів швейних виробів в їх дизайні і виробництві із застосуванням гіротермічного оброблення. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2022. №102 С. 84–99. <http://ageg.knuba.edu.ua/article/view/266735> (дата звернення 15.01.2024).
8. Буханцова Л. В. Дослідження зміни грубої структури костюмно-пальтових тканин при формотворенні деталей швейних виробів. *Наукові нотатки*. 2011. № 34. С. 29–33.
9. Пилипака С. Ф. [та ін.]. Побудова геодезичних ліній на поверхнях обертання, отриманих зміщенням меридіана. *Енергетика і автоматика*. 2023. № 5. С 71–78. [https://doi.org/10.31548/energiya5\(69\).2023.071](https://doi.org/10.31548/energiya5(69).2023.071).
10. Ковальова Г., Калінін О., Калініна Т. & Нікітенко О. Наближена побудова геодезичних ліній на поверхнях обертання. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2020 №3(2.2), С. 156–164.
11. Пилипака С., Несвідомін А. Побудова геодезичних ліній, як граничних траєкторій руху матеріальних частинок по поверхні. *Енергетика і автоматика*. 2022. № 2. С. 94–100. <https://doi.org/10.31548/energiya2022.02.094>.



12. Тітова О. О., Гребенюк С. М. Конформні відображення. Запоріжжя: ЗНУ, 2020. 80с. <https://dspace.znu.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/12345/3098/Titova.pdf?sequence=1&isAllowed=y> (дата звернення 09.01.2024).
13. Кресан Т. А., Петрик А. М. Кінематичні способи конструювання торсів із застосуванням рухомої площини. *Науково-технічне співробітництво: принципи, механізми, ефективність*. Київ: НАТК. С. 162–180.
14. Дзякович Д. О. Екстремальність геодезичних і критерії визначення універсальних багатоточкових інваріантів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2020 № 62.1. С. 83-91.
15. Garg A., Seijman-Furnas A., Deng B., Yue Y., Grinspan E., Pauly M. & Vardetsky M. Wire mesh construction. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*. 2014. № 33. P. 1–12. <https://doi.org/10.1145/2601097.2601106>.
16. Miguel E., Tamstorf R., Bradley D., Schwartzman S., Tomaszewski B., Bykel B., Matusyk V., Marshner S. and Otaduy M. Modeling and assessment of internal friction in fabric. *Transactions of the ACM with Graphics (TOG)*. 2013. № 32 P. 1–10. <https://doi.org/10.1145/2508363.2508389>.
17. Wang B., Wang H., Schling E. and Pottmann H. Correction of stripe patterns. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*. 2023. № 42. P. 1–18. <https://doi.org/10.1145/3618378>.
18. Liu Y., Pan H., Snyder J., Wang W. and Guo B. Calculation of self-supporting surfaces by the method of regular triangulation. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*. 2013. № 32, P. 1–10. <https://doi.org/10.1145/2461912.2461927>.
19. Deng B., Bouaziz S., Deuss M., Zhang J., Schwartzburg Y. & Pauly M. Study of local modifications for networks with constraints. *Forum of computer graphics* 2013. № 32. P. 12–21. <https://doi.org/10.1111/cgf.12021>
20. Porann R., Ovreyu E. and Gotsman K. Interactive planarization and optimization of 3D grids. *Forum of computer graphics*. 2013. № 32. P. 50–62. <https://doi.org/10.1111/cgf.12005>.
21. Sun P., Fu K., Goswami P., Zheng J., Mitra N. & Cohen-Or D. Mutual frame designs have become easier. *Transactions of the ACM with Graphics (TOG)*. 2013. № 32. P. 1–13. <https://doi.org/10.1145/2461912.2461915>.
22. Wang H., Pellis D., Rist F., Pottmann H. and Müller K. Discrete geodesic parallel coordinates. *ACM Transactions with Graphics (TOG)*. 2019. № 38. P. 65- 75. <https://doi.org/10.1145/3355089.3356541>.
23. Hotz I. and Hagen H. (2000). Visualization of geodesics. *Proceedings Visualization 2000. VIS 2000*. 2000. No 00CH37145. P. 311–318. <https://doi.org/10.1109/visual.2000.885710>.



24. Sun P., Fu K., Goswami P., Zheng J., Mitra N. & Cohen-Or D. Mutual frame designs have become easier. *Transactions of the ACM with Graphics (TOG)*. 2013. № 32, P. 1–13. <https://doi.org/10.1145/2461912.2461915>.

25. Bouaziz S., Deuss M., Schwartzburg Y., Weise T. and Pauly M. Shape-Up: formation of discrete geometry with the help of projections. *Forum of computer graphics*. 2012. № 31. P. 116–130. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2012.03171>.

*Стаття надійшла до редакції 08.02.2024 р.*

**V. V. Vanin<sup>1</sup>, S. V. Zalevsky<sup>1</sup>, O. A. Golova<sup>1</sup>, M. V. Grubich<sup>1</sup>,  
Yu. V. Lazarchuk-Vorobyova<sup>1</sup>**

**<sup>1</sup>National Technical University of Ukraine  
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"**

### **PRO IS ONE WAY TO BUILD A MODEL OF A CHEBYSHEV MESH ON A SURFACE**

#### *Summary*

The article proposes a method for constructing a model of the Chebyshev mesh on a non-deploying surface, which can be used to solve the problem of dressing the surface with fabric. The primary line of the Chebyshev grid is drawn using the sequential reprojection method. The construction step is selected depending on the properties of the fabric: the maximum allowable value of the mesh angle and the curvature of the surface in the normal section along the selected initial direction. For mesh modeling It is proposed to use a linear unfolding surface - a torsion surface, which bends around a given surface along the geodesic - primary line of the Chebyshev grid model. To construct the forming unfolding surfaces, a spherical mapping of a geodesic line to a unit sphere is used. The directions of the constituents are found using the stereographic projection of the sphere onto the plane. Since straight lines on the flat pattern surface are mapped to geodesics on a given surface, the task of finding the nodal points of the first strip of the grid model is reduced to drawing squares on the unfolding of the envelope of the torso surface. The nodal points of the Chebyshev mesh model on the surface are plotted using an algorithm for finding distances to the surface with a specified accuracy. The final finding of anchor points is carried out using the algorithm for adjusting the cell lengths of the mesh model. Next, we take the resulting nodes as geodesic points – a new baseline for drawing the next strip of cells. The accuracy of the constructed model can be increased by decreasing the step of drawing the primary line of the Chebyshev grid. The found model will make it possible to use algorithms and programs for automated cutting of material for complex non-deploying surfaces. The algorithm presented in the robot includes both the consideration of geometric features of the shape of the surface to be covered and the requirements for a snug covering based on woven warp and weft threads of composite materials. The algorithm also allows to adjust the step of Chebishev network model onstruction for more accurate matching of the obtained cut and the possibility to fit the given shape with minimal deformations.

**Keywords:** chebyshev grid, geodetic, spherical projection.