

DOI <https://doi.org/10.32782/2220-8674-2025-15-2-17>

УДК 001.891.3:165.21

С. П. Сокол, к.т.н., доцент

І. А. Волик, к.т.н., доцент

Є. І. Лепеть, асистент

Дніпровський державний аграрно-економічний університет

e-mail: sokol.s.p@dsau.dp.ua

ORCID : 0000-0003-4541-5720

ORCID : 0000-0002-9861-3723

ORCID : 0000-0002-0482-538X

АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗЕМЛЕРОБСЬКОЇ МЕХАНІКИ ТА ЇХ АНАЛІЗ ЩОДО ВИКОРИСТАННЯ НА ПРОЄКТНОМУ ЕТАПІ РОЗРОБКИ ҐРУНТООБРОБНИХ МАШИН

Анотація. У роботі проаналізовано основні фундаментальні моделі землеробської механіки щодо використання в процесі розробки й проєктування ґрунтообробних робочих органів. Запропоновано узагальнювальну інтегральну модель обґрунтування конструктивних параметрів знаряддя. З урахуванням імовірного характеру протікання процесів кришення й розпушення ґрунтового середовища. Наведено приклади прикладних моделей, побудованих за представленими в роботі принципами. У статті запропоновано систематизацію відомих моделей. Загалом, процес розробки знаряддя представлений як сукупність моделей, розглянутих послідовно. Окремо досліджено стохастичні й аналітичні моделі. Наведено рекомендації з їх використання відповідно до етапів проєктування, починаючи з ескізного й завершуючи технічним проєктами.

Ключові слова: землеробська механіка, ґрунтообробка, інтегральна математична модель, якісні показники кришення й розпушення.

Постановка проблеми. Процес розробки ґрунтообробного наряддя можна розглядати як послідовність виконання низки модельних досліджень. Математична модель у цій послідовності є основним інструментом обґрунтування на проєктному етапі конструктивних параметрів робочого органу. Але проблема полягає в тому, що кожний різновид робочого органу повинен мати власну прикладну модель, яка б установлювала залежність показників виконання технологічного процесу від конструктивних параметрів знаряддя й механіко-технологічних властивостей оброблюваного середовища. Така прикладна модель розробляється на основі дійсних фундаментальних моделей з використанням методів теоретичної і землеробської механіки, нарисної та аналітичної геометрії.

Останнім часом науковці запропонували низку нових фундаментальних моделей. Ми проаналізували можливість їх використання в практичній роботі з розробки й проєктування.

Мета дослідження – аналіз й адаптація математичних моделей і методик обґрунтування конструктивних параметрів ґрунтообробних робочих органів щодо можливості використання в процесі проєктних робіт.

Огляд досліджень. Серед усіх видів моделювання математичне є найбільш поширеним. Воно поділяється на детермінантне, або таке, що базується на рівняннях, які описують фізичні закони протікання процесів в об'єкті, і стохастичне, засноване на математичній обробці отриманого за допомогою спостережень чисельного масиву даних, що характеризують роботу об'єкта дослідження.

Під землеробською механікою розуміють розділ загальної механіки, який вивчає будову й кінематику механізмів, що взаємодіють з матеріалами сільськогосподарського призначення. Фактично, землеробська механіка є систематизованою сукупністю математичних моделей, які поділяють на

фундаментальні, або такі, що вивчають загальнотеоретичні питання, і прикладні – такі, що стосуються раціоналізації окремого конструктивного параметру знаряддя. Фундаментальні моделі не можна використати безпосередньо для розробки робочих органів. Вони становлять основу розробки прикладних моделей. Прикладна модель є підсумковим етапом аналітичного дослідження технологічного процесу, виконуваного конкретним робочим органом. Розрахунковий курс сільськогосподарських машин і є такою сукупністю прикладних детермінантних моделей.

Огляд аналітичних досліджень [2; 4; 8; 14; 16] показує, що математичні моделі землеробської механіки можна систематизувати за такою схемою, рис. 1.

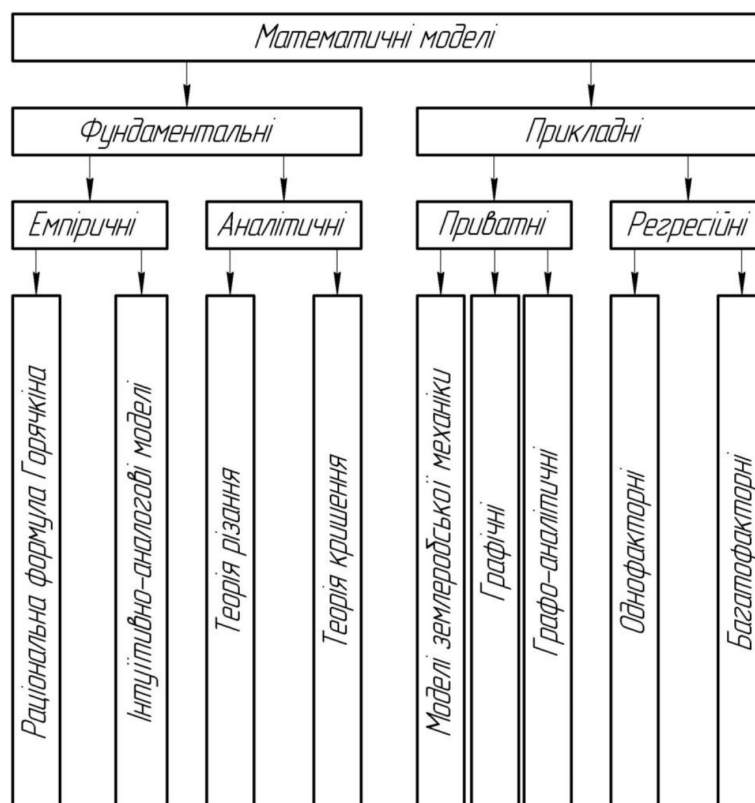


Рис. 1. Систематизація видів математичного моделювання ґрунтообробних машин [4]

Проаналізуємо сутність окреслених моделей і можливі варіанти їх використання як основи загальної графоаналітичної моделі.

1. Фундаментальні моделі.

1.1. *Раціональна формула В. П. Горячкіна* – фундаментальна емпірична модель взаємодії плуга з ґрунтом [4].

Рівняння сформоване методом інтуїтивно-аналітичного аналізу, а саме: В. П. Горячкін окреслив групу всіх можливих конструктивно-кінематичних параметрів плуга, які можуть впливати на тяговий опір, і запропонував їх об'єднати в раціональну формулу Використовуючи метод аналізу розмірностей, обґрунтовано низку коефіцієнтів, які й формують рівняння. Методикою аргументовані тільки розмірності коефіцієнтів. Чисельне їх значення може бути визначене тільки в процесі натурного експерименту. Саме рівняння не наводимо, бо воно є загальновідомим і розглядається у звичайних підручниках з курсу сільськогосподарських машин.

Модель містить виключно механізм перевірки ефективності конструкції з погляду виконання технологічного процесу й не містить механізмів обґрунтування конструктивних параметрів. Тому на проєктному етапі в канонічному виді має обмежене застосування. Але опосередковано рівняння може бути використане.

Раціональна формула В. П. Горячкіна на пряму не може бути використана в загальній моделі, бо конструктивні параметри знаряддя входять до так званого чорного ящика, і їх вплив оцінити неможливо. Необхідно ввести в рівняння вихідні параметри, які б допомогли оцінити тяговий опір залежно від конструктивних параметрів знаряддя, при цьому не порушували загальної концепції моделі. Єдиний варіант – це встановлення залежності ширини захвату й глибини оранки від досліджуваних параметрів знаряддя. Так, наприклад, для полицевих робочих органів це може бути кут постановки леміша до дна борозни (ε) і кут постановки леза леміша до стінки борозни (γ_0), для глибокорозпушувача – кут атаки і ширина долота. Практика показує, що введення більше трьох змінних параметрів недоцільне, бо значно ускладнює проведення розрахунків і зменшує їх адекватність.

1.2. Аналітична модель взаємодії з ґрунтом робочого органу довільної геометричної форми
А. М. Панченка [4; 14].

На відміну від вищерозглянутих у цій моделі, робочий орган функціонально поділяється на ріжучий периметр і робочі поверхні. Леза ріжучого периметра зминають ґрунт і відділяють від загального масиву призму сколювання, яка надходить на робочі поверхні. Робочі поверхні кришать і розпушують ґрунт. Поверхні сприймають тиск ґрунту, сили тертя і швидкісний напір. Принциповим у моделі є те, що складники тягового опору максимально деталізовані. Як результат, тяговий опір має такі складники [4]:

$$P = P_{ск} + (P_N + P_{TP} + P_{зат} + P_V) \cdot \cos \left[\arctg \frac{i \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi} - \varphi \right], \quad (1)$$

де: $P_{ск}$, P_N , P_{TP} , $P_{зат}$, P_V – відповідно проєкції на напрямок руху відповідно сил сколювання призми, нормального тиску ґрунту на поверхню, сили тертя при переміщенні ґрунту вздовж робочої поверхні, додаткова сила від затуплення леза, швидкісного складника опору [4].

Так, А. М. Панченко за аналогією з В. П. Горячкіним фактично запропонував власну раціональну формулу (1).

Знайшовши аналітичні вирази для складників рівняння (1), автор прийшов до трьох інтегральних формул: [14, ф-ла 202] – для блокованого режиму взаємодії з ґрунтом робочого органу довільної геометричної форми, [14, ф-ла 221] – деблокованого, [14, ф-ла 220] – напівблокованого. Методика має низку особливостей, які роблять її ексклюзивною в цьому напрямі досліджень. Особливість полягає в тому, що методика працює з приведеними значеннями ширини захвату й глибини робочого ходу. Робоча поверхня розглядається як міделевий перетин конструктивної ширини захвату. Це спрощує модель, але вимагає окремих модельних уявлень типових робочих поверхонь. Панченко запропонував методики визначення приведеної ширини захвату для типових поверхонь [2, табл. 4]. Тяговий опір однотипних, але різних за конструктивним виконанням робочих органів за однакової приведеної ширини захвату буде однаковим. Це робить проблематичним використання методики для порівняння показників роботи різнотипних знарядь. До того ж збіжність з результатами експериментальних досліджень аналітично розрахованих результатів залежить від ступеня адекватності методик визначення приведених параметрів.

Дослідження, виконані на основі наведеної методики, дають змогу на проєктному етапі оцінити прогнозований тяговий опір робочого органу й шляхом зміни конструктивних параметрів виконати їх раціоналізацію, аналітично визначити прогнозований тяговий опір конструкції, але не дає змоги оцінити якість кришення середовища.

У роботі [14] запропоновано вирішити проблему шляхом введення спеціального показника, який отримав назву внутрішньої напруги. Сутність полягає в тому, що в оброблюваному середовищі елементарні сили зчеплення, внутрішнього тертя й пружності утворюють напружений стан. Для деструкції такого середовища цю силу необхідно подолати напруженим станом, що

утворює робочий орган. Теорія є результатом розробки й аналізу ряду аналітичних моделей. Так, наприклад, розрахункове значення внутрішньої напруги (G) для усереднених ґрунтових умов Дніпропетровської області становить $G = 638 \text{ кН/м}^2$;

Процес кришення характеризується штучно введеним коефіцієнтом кришення (i_1), який є основою для подальших розрахунків основних показників кришення [6,13], як-от коефіцієнт структурності, коефіцієнт різноподрібнення структурних агрегатів, структурність ґрунту [4].

$$i_1 = \frac{2K_p \cdot E_v}{G^2} + 1, \quad (2)$$

де: K_p – питомий коефіцієнт опору; $E_v = 24,0 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$, середнє заміряне значення модуля пружності ґрунту для Дніпропетровської області.

Так, графоаналітична модель А. М. Панченко систематизована за такою схемою, рис. 2.

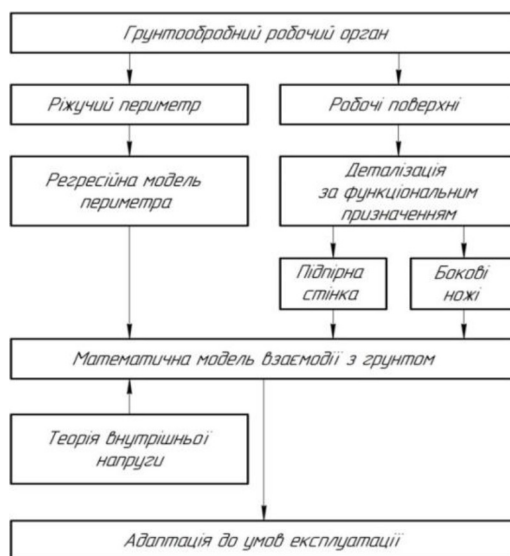


Рис. 2. Структурна схема аналітичної моделі відповідно до раціональної формули А. М. Панченко

2. Графоаналітичні моделі.

2.1. Графоаналітичні моделі проєктування поверхонь поличних робочих органів М. В. Сладкова і М. В. Щучкіна [9].

В основі графоаналітичних моделей закладена робоча гіпотеза, відповідно до якої робоча поверхня формується переміщенням у просторі прямолінійної твірної. Перевага такого підходу полягає в тому, що отримувані поверхні є розгортними, тобто полиця є технологічною з погляду виготовлення. Відмінність моделей полягає в тому, що, за методикою М. В. Сладкова, переміщення твірної виконується по двох напрямних кривих. Відповідно до методики М. В. Щучкіна, по одній напрямній при зміні кута твірної до стінки борозни. Напрямна крива і кут постановки твірної визначають геометрію та орієнтацію в просторі робочого органу. У моделі задано базовий варіант рівняння напрямної, але профіль може бути адаптований під конкретні вимоги взаємодії з ґрунтом. До того ж функція може бути розривною, що надає додаткові можливості в моделюванні.

Відомий варіант [11], у якому поверхня робочого органу утворена переміщенням у просторі горизонтальної і вертикальної криволінійних утворюючих. При нескінченно малому переміщенні в перетині утворюється нескінченно мала ділянка, яка може розглядатися як плоска підпiрна стiнка, що має кути постановки до вертикалі й напрямку руху. Сума всіх ділянок утворює поверхню робочого органу. Аналогічний підхід до вирішення проблеми розглянуто в [17].

Слід відмітити, що наведені методики дають змогу будувати конструкцію робочого органу з погляду можливості виконання технологічного процесу без урахування тягового опору і якісних показників кришення та розпушення ґрунту.

2.2. Графоаналітична модель С. С. Тищенка [15; 16].

Графоаналітичні моделі М. В. Сладкова і М. В. Щучкіна використовують лінійчасті поверхні. У такому разі на площинах декартових координат, проєкції утворювальних описуються двома рівняннями прямої лінії, тому кількість параметрів, що визначають положення твірної у просторі, дорівнює чотирьом. С. С. Тищенко запропонував ці показники вважати функціями деякого узагальнювального параметра, а саме коефіцієнта адаптивності [6], що робить функцію однопараметричною. Це надає можливість зміною тільки одного єдиного коефіцієнта отримувати як розгортні, так і нерозгортні поверхні. Принципова відмінність полягає в тому, що розгортна поверхня доводить до шару ґрунту тільки деформацію простого згину [15; 16]. А по мірі поступового переходу до нерозгортної поверхні в шарі ґрунту виникають пластичні деформації. Так, геометрична модель поверхні зі змінюваною Гауссовою кривизною дає змогу їх проєктувати із заданою інтенсивністю дії на ґрунт. Але для оцінки ефективності конкретного конструктивного рішення необхідно оцінити прогнозовані якісні показники взаємодії робочої поверхні з ґрунтовим середовищем, а для цього потрібна аналітична модель взаємодії з ґрунтом робочої поверхні довільної геометричної форми.

Основний матеріал досліджень.

Як показує виконаний аналіз, графоаналітична модель надає геометрію робочого органу, а аналітична – методику оцінки якісних показників виконання технологічного процесу. Тому як інтегральну модель доцільно приймати синтез графоаналітичної та аналітичної моделей, рис. 3.

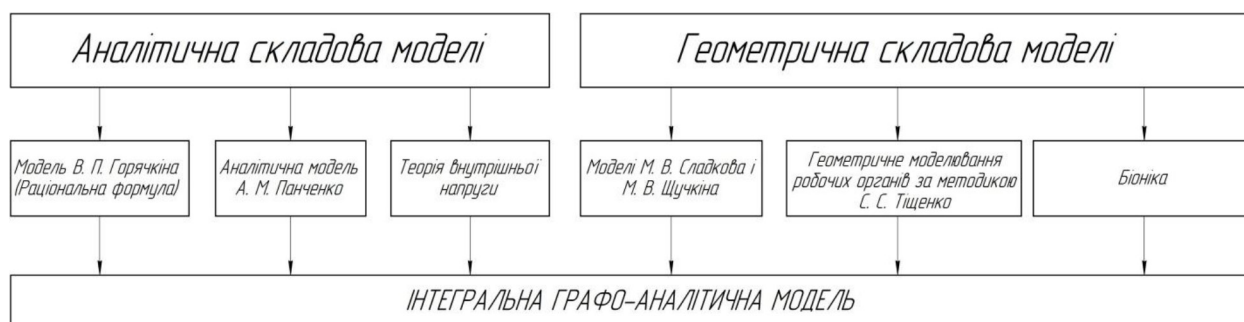


Рис. 3. Схема синтезу інтегральної графоаналітичної моделі

Інтегральна модель повинна виконувати завдання проєктування відповідно до етапів розробки конструкторської документації, особливо це стосується етапів ескізного й технічного проєктів. Розглянемо модель поетапно.

Авансовий проєкт має переважно регламентаційний характер, а саме: обґрунтовує технологічний процес, окреслює технічні характеристики машини, умови, у яких передбачена її експлуатація і якісні показники виконання технологічного процесу. Етап можна розглядати як текстову модель. Ескізний проєкт – проєктна конструкторська документація, яка містить принципові конструктивні рішення та дає загальне уявлення про будову й принцип дії знаряддя. Визначальним на цьому етапі є прийняття геометричної моделі як основи подальших досліджень. Обґрунтування геометричної моделі має декілька варіантів виконання: синтез відомих конструкцій, інтуїтивно-аналітичний метод, методи біоніки [1; 3; 7].

На етапі ескізного проєктування розробляється конструктивна й технологічна схеми. Конструктивні параметри ще не деталізуються. На підставі розроблених схем можна оцінити

прогнозовану ширину захвату і глибину робочого ходу, що робить правомірним застосування раціональної формули В. П. Горячкіна для порівняння в першому наближенні різних варіантів виконання конструктивної схеми за величиною прогнозованого тягового опору. Для порівняння варіантів достатньо мати не абсолютні значення величин тягового опору, а співвідношення складників раціональної формули у варіантах, які визначають реакцію різання, кришення і розпушення. Тобто за наявності інших рівних умов варіанти достатньо порівнювати за величиною площі міделевого перетину.

Технічний проєкт – проєктна конструкторська документація, яка містить остаточне технічне рішення і дає повне уявлення про будову машини та її складових одиниць. Найперше виконують креслення основного робочого органу й наступним етапом допоміжних. Розробка робочого органу полягає в адаптації геометричної моделі до роботи в реальних ґрунтових умовах. Адаптація може бути виконана за критеріями коефіцієнта ковзання або якості кришення [9]. В обох випадках остаточне рішення може бути прийняте за прогнозованою величиною тягового опору, яку пропонується визначити за раціональною формулою А. М. Панченка [14].

Ми пропонуємо в раціональній формулі відмовитися від використання приведених значень ширини захвату. Прийнята робоча гіпотеза полягає в тому, що, на відміну від моделі А. М. Панченка, робочий орган розглядається не як єдине ціле – у ньому виокремлюють різальний периметр і робочі поверхні. Така диференціація пов'язана з відмінністю механізмів різання і кришення. Різальний периметр підрізає шар ґрунту і відділяє від загального масиву призму сколу. Робочі поверхні виконують розпушення, зсув та обертання підрізаної призми. Важливим елементом технологічної схеми роботи знаряддя є аналіз режимів роботи його складників. Якщо різальний периметр працює в блокованому режимі, то робочі поверхні працюють у межах сколотої призми, тому режим може бути як напівблокованим, так і деблокованим. Визначається графічно шляхом побудови схеми розповсюдження тріщин сколу від елементів складників різального периметра [12].

Наступним етапом необхідно отримати аналітичні вирази, які однозначно описують у системі координат геометричні моделі різального периметра і робочих поверхонь, що є обов'язковою умовою для створення аналітичної моделі. У роботі [14] представлено узагальнені схеми моделювання різального периметра й робочої поверхні. Далі, за рекомендацією [14], питомий коефіцієнт опору розглядається як відношення проєкцій на напрямок руху сил різання і реакції робочих поверхонь до площі міделевого перетину робочого органу. Такий підхід надає можливості оцінити на проєктному етапі ступінь кришення і, як наслідок, усі основні показники кришення відповідно до переліку [13]. Робочий проєкт безпосередньо не впливає на конструктивне рішення, тому ми їх не розглядаємо. Досліджені підходи до розробки знаряддя пройшли апробацію [18] і знайшли практичне підтвердження ефективності.

Висновки:

1. Математичне моделювання за своєю суттю є єдиним інструментом, що дає змогу на проєктному етапі адаптувати робочі органи до роботи в умовах ґрунтового середовища.
2. Серед фундаментальних основ досліджень ґрунтообробних робочих органів можна виділити дві моделі: стохастичну – раціональна формула В. П. Горячкіна, й аналітичну – раціональна формула А. М. Панченка.
3. Теорія внутрішньої напруги може бути прийнята як методична основа аналітичних досліджень.
4. Наведений у роботі алгоритм сумісного використання стохастичних, аналітичних і графоаналітичних моделей дає змогу виконати комплексний підхід до розробки та проєктування.
5. Головна умова функціонування алгоритму досліджень полягає в розмежуванні геометричних моделей різального периметра й робочих поверхонь

*Список використаних джерел*

1. Бабицький Л. Ф. Біонічні напрями розробки ґрунтообробних машин. Київ : Урожай, 1998. 164 с.
2. Ветохін В. І. Системні та фізико-механічні основи проєктування розпушувачів ґрунту : автореф. дис. ... д-ра техн. наук; ННЦ ІМЕСГ. Глеваха, 2010. 40 с.
3. Волик Б. А., Лісунов П. М., Коновий А. В. Формування геометричних моделей ґрунтообробних робочих органів на основі методів біоніки та їх адаптація до роботи в умовах ґрунтового середовища: Achievements of 21st Century Scientific Community: Proceedings of the 2nd International Scientific and Practical Internet Conference, September 16–17, 2024. FOP Marenichenko V. V., Dnipro, Ukraine, p 68–69.
4. Волик Б. А., Теслюк Г. В., Коновий А. В., Лепеть Є. І. Аналітичний огляд методів моделювання засобів механізації обробітку ґрунту. Науковий вісник ТДАТУ. Запоріжжя : ТДАТУ, 2023. Вип. 13, том 1. URL: <https://oj.tsatu.edu.ua/index.php/visnik/issue/view/28> DOI: 10.31388/2220-8674-2023-1-2
5. Волик Б. А., Степанець О. І., Шпильковський В. В., Аналіз відомих математичних моделей взаємодії з ґрунтом ріжучого периметра довільної геометричної форми / Сучасний стан та перспективи розвитку аграрного сектору України: Зб. наукових праць (30 листопада 2018, м. Ніжин) / За наук. Ред. В. С. Лукача [та ін.]. Ніжин, 2018. С. 23–33.
6. Волик Б. А., Теслюк Г. В., Коновий А. В., Лепеть Є. І. Методика прогнозування на проєктному етапі якісних показників роботи ґрунтообробного знаряддя. *Науковий вісник ТДАТУ*. Мелітополь : ТДАТУ, 2021. Вип. 11, том 2.
7. Волик Б. А., Сокол С. П. Узагальнена схема цифрового механіко-біонічного моделювання ґрунтообробних машин. Збірник тез доповідей XXIV Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми землеробської механіки» (17–19 жовтня 2023 року), присвяченій 123 річниці з дня народження академіка Петра Мефодійовича Василенка. С. 68–71.
8. Кобець А. С., Сокол С. П., Пугач А. М., Дирда В. І., Волик Б. А., Тищенко С. С., Гаврильченко О. С. Землеробська механіка. Дніпро, Пороги, 2022. 408 с.
9. Кобець А. С., Кобець О. М., Пугач А. М. Теорія і розрахунок сільськогосподарських машин: практикум. Дніпропетровськ : Вид-во «Свідлер А. Л.». 2011. 164 с.
10. Konoviy A., Volik B. Adaptation of the geometric model of the body of marine animal as a tillage tool./ International independent scientific journal №30/2021, Kraków, Rzeczpospolita Polska. p. 66–68.
11. Семенюта А. М. Методика розрахунку загальної реакції різання ґрунту поверхнею довільної геометричної форми.
12. Кобець А. С., Іщенко Т. Д., Волик Б. А., Демидов О. А. Механіко-технологічні властивості сільськогосподарських матеріалів : навч. посібник. Дніпропетровськ : РВВ ДДАУ, 2009. 84 с.
13. Єщенко В. О., Копитко П. Г., Опришко В. П., Костогриз П. В. Основи наукових досліджень в агрономії : підручник / за ред. В. О. Єщенко. Київ : Дія. 2005. 288 с.
14. Панченко А. Н. Теорія подрібнення ґрунтів ґрунтообробними знаряддями. Дніпропетровськ : ДГАУ, 1999. 140 с.
15. Тищенко С. С., Карась В. В. Геометричні основи проєктування поличних робочих органів: монографія. Дніпро : ТОВ «Домінанта-Прінт»,
16. Тищенко С. С. Геометрическое моделирование адаптивных почвообрабатывающих органов. / «Проблеми та перспективи розвитку Аграрної Механіки» Матеріали міжнародної науково-практичної конференції. Дніпропетровськ, 2004. С. 29.
17. Gheres M. I. Mathematical model for studying the influence of tillage tool geometry on onenergy consumption. Vol. 42, No. 1 / 2014 INMATEH – Agricultural Engineering
18. Maria Matvienko, Boris Volyk, Yevhen Lepet. Substantiation of the design and field studies of the roller shredder of plant The materials of the 5th International Scientific and Technical Internet Conference “Innovative development of resource-saving technologies and sustainable use of natural resources”. Book of Abstracts. Petroșani, Romania: universitas Publishing, 2022. P. 223–224

*Стаття надійшла до редакції 19.10.2025**Стаття прийнята 05.11.2025**Статтю опубліковано 22.12.2025*



S. Sokol, B. Volyk, Ye. Lepet
Dnipro State Agrarian and Economic University

**ANALYTICAL REVIEW OF FUNDAMENTAL MATHEMATICAL MODELS
OF EARTH MECHANICS AND THEIR ANALYSIS FOR CONDITIONS
OF USE AT THE DESIGN STAGE OF SOIL PROCESSING MACHINES**

Summary

The paper analyzes the main fundamental models of agricultural mechanics for use in the development and design of tillage working tools. A generalizing integral model of substantiation of the design parameters of the tool is proposed, taking into account the probabilistic nature of the processes of crumbling and loosening of the soil environment. Examples of applied models built according to the principles presented in the work are given. The work proposes a systematization of known models. In general, the tool development process is presented as a set of sequentially considered models. Stochastic and analytical models are considered separately. Recommendations are given for their use in accordance with the design stages, starting from the sketch and ending with technical projects. Graphoanalytical models are considered as those that combine analytical mathematical and design parts. The main disadvantage of such models is that they are designed mainly for shelf working bodies and they do not contain recommendations for substantiation of the initial parameters.

The fundamental condition for successful design according to this scheme is the need to clearly determine the type of tool at the initial stage: will it be a shelf working body, a deep cultivator, or a variant of a pointed paw.

The main condition for the functioning of the research algorithm is the separation of geometric models of the cutting perimeter and working surfaces.

The considered approaches to tool development have been tested and have found practical confirmation of their effectiveness.

Keywords: Agricultural mechanics, tillage, integral mathematical model, qualitative indicators of crumbling and loosening.