

DOI <https://doi.org/10.32782/2220-8674-2025-15-2-36>

УДК 004.942

Є. А. Гавриленко, д-р техн. наук, професор

ORCID: 0000-0003-4501-445X

О. Ю Михайленко, старший викладач

ORCID: 0000-0002-8836-3222

Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного

e-mail: olena.mykhailenko@tsatu.edu.ua

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ У CAD-СИСТЕМІ SOLIDWORKS

Анотація. У роботі досліджуються можливості CAD-системи SolidWorks з моделювання гладких обводів із регулярною зміною кривини. Запропоновано методику формування обводів дугами еліпсів і В-сплайнів, що забезпечує інтерполяцію будь-якого точкового ряду по частинах, які можна інтерполювати монотонною кривою лінією. Обвід формується всередині області можливого розташування опуклої кривої лінії, якою можна інтерполювати точковий ряд. Можливості розроблених способів підтверджено розв'язанням задач інтерполяції послідовності точок, які призначені на монотонних кривих лініях. Задачі розв'язані в CAD-системі SolidWorks за допомогою програми, створеної на основі розроблених у роботі способів.

Ключові слова: інтерполяція, дотична пряма, кривина, область розташування кривої, обвід, похибка, CAD-система, програмний додаток.

Постановка проблеми. Технологія виготовлення виробів на верстатах із числовим програмним керуванням (ЧПК) дає можливість обробляти поверхні довільної форми. Керуюча програма для верстата із ЧПК створюється в автоматизованому режимі в САМ-системі. Вихідними даними для САМ-системи є тривимірна комп'ютерна модель виробу, що формується в CAD-системі (SolidWorks, AutoCAD, NXCAD та інші).

Точність обробки визначається точністю формування тривимірної моделі, точністю визначення траєкторії ріжучого інструмента САМ-системою та точністю, з якою верстат виконує запрограмовані операції. Коректне формування тривимірної моделі – необхідна умова якісного виготовлення виробу [5; 6].

Однією з найскладніших завдань геометричного моделювання є створення моделей поверхонь, що обмежують вироби, функціональне призначення яких – взаємодія із середовищем (газом, рідиною або сипучими матеріалами). Прикладом таких виробів є корпуси автомобілів та літальних апаратів, робочі органи сільськогосподарських машин, лопатки робочих коліс турбін. Основною функціональною характеристикою поверхонь, що обмежують такі вироби, є ламінарний характер їх обтікання середовищем [1; 7; 8].

Технологія моделювання в CAD-системі ґрунтується на формуванні поверхонь на основі лінійчастих каркасів, елементи яких можуть бути отримані шляхом інтерполяції великої кількості точок. Розв'язання такої задачі потребує створення спеціалізованих додатків до CAD-системи для автоматизації моделювання. При цьому функціональні властивості поверхонь, що моделюються, визначаються геометричними характеристиками кривих ліній, які є елементами каркаса. Ламінарний характер взаємодії поверхні із середовищем забезпечується використанням як елементів каркаса ліній із регулярною зміною значень кривини та мінімальним, виходячи з умов завдання числом особливих точок. Для плоскої кривої лінії це точки стикування опуклих і увігнутих частин і точки, у яких кривина має екстремальні значення [2; 3].

Таким чином, розробка адаптованих до CAD-систем методів інтерполяції точкових рядів, які дають змогу із заданою точністю та із забезпеченням заданих характеристик подати вихідну криву лінію, а також засобів програмної реалізації зазначених методів є актуальним завданням.

Аналіз останніх досліджень. Гладку плоску криву лінію, яка не містить особливих точок, називатимемо кривою з монотонною зміною кривини або монотонною кривою. Завдання інтерполяції точкового ряду, що задає монотонну криву лінію, вирішується шляхом формування обводу – кривої лінії, що складається з ділянок аналітично заданих кривих, з'єднаних у вихідних точках. На цей час найбільш розроблені методи формування обводів кривими другого порядку, ділянками кривих Безьє та B-сплайнів [4; 9; 10; 11].

У разі формування гладкого обводу, що складається з дуг кривих другого порядку [9], гарантовано відсутність неконтрольованого виникнення точок перегину вздовж обводу, але немає можливості запобігти виникненню точок з екстремальними значеннями кривини. Коригування форми обводу можливе шляхом зміни положень дотичних прямих до обводу у вихідних точках. За фіксованих положень дотичних прямих у вихідних точках можливість локального коригування форми обводу існує в разі його формування дугами еліпсів. Метою коригування може бути забезпечення рівності значень радіусів кривини в точках стикування ділянок обводу.

Використання для формування обводу кривих Безьє [4; 10] і B-сплайнів [11] третього і вищих порядків забезпечує ширші можливості управління формою обводу. Сплайн визначається контрольними точками, кожній з яких відповідає функція сполучення. Він є складовою кривою лінією, кожен сегмент якої визначає окреме рівняння, ступінь якого дорівнює ступеню функцій сполучення (k). При цьому в точках стикування сегментів автоматично забезпечується безперервність значень похідних до $k - 1$ порядку включно. Крива апроксимує контрольний багатокутник – ламану лінію, що з'єднує контрольні точки. Коригування форми сплайна виконується шляхом зміни положення контрольних точок. Контроль за динамікою зміни кривини здійснюється за допомогою графіка, доступного в CAD-системі. Підвищення якості стикування ділянок обводу потребує збільшення ступеня рівняння сплайна, що призводить до збільшення числа контрольних точок. У підсумку локальне коригування конфігурації та характеристик сплайна ускладнюється. Забезпечити монотонну зміну кривини вздовж B-сплайна, який інтерполіює велику кількість вихідних точок, важко.

Сучасні CAD-системи дають можливість формувати обводи кубічним сплайном, який автоматично забезпечує регулярність значень кривини в точках обводу. Контроль за виникненням особливих точок усередині ділянок обводу може виконуватися в ручному режимі через переміщення курсором миші фантомів контрольних точок, що задають сплайн. Необхідність коригування в ручному режимі знижує можливості використання B-сплайна в разі формування обводів з монотонною зміною кривини.

У роботі [12] запропоновано спосіб формування обводу по ділянках, які із заданою точністю представляють монотонну криву лінію. Завдання вирішується згідно з такими етапами:

- проводиться аналіз вихідного точкового ряду, за результатами якого визначаються його частини, які можна інтерполювати монотонною кривою лінією;
- у вихідних точках призначаються положення дотичних і значення радіусів кривини, за яких завдання формування монотонної кривої лінії має рішення;
- визначається область можливого розташування монотонної кривої, що інтерполіює ділянки точкового ряду;
- усередині отриманої області формується обвід, який із заданою точністю представляє монотонну криву лінію.

Аналіз вихідного точкового ряду засновано на визначенні радіусів прилеглих кіл, кожне з яких проходить через три послідовні точки ряду. Частина точкового ряду, вздовж якого раді-

уси прилеглих кіл збільшуються або зменшуються, можна інтерполювати монотонною кривою лінією, вздовж якої радіуси кривизни збільшуються або зменшуються відповідно.

Критерієм коректного призначення дотичних прямих до монотонної кривої, що інтерполює точний ряд, уздовж якої значення радіусів кривизни зростають, є виконання співвідношення $|i, T| < |T, i + 1|$ (рис. 1), де T – точка перетину дотичних до кривої у сусідніх вихідних точках (t_i та t_{i+1}).

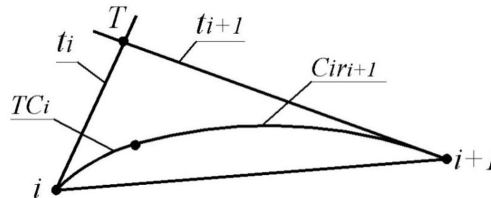


Рис. 1. Нижня межа області можливого розташування ділянки монотонної кривої

Із зазначеного критерію визначаються діапазони положень дотичних, у яких можливе формування кривої з монотонним зміною кривини. Остаточні положення дотичних у вихідних точках призначаються центром отриманих діапазонів.

Далі призначаються радіуси кривини, за яких завдання формування монотонної кривої має рішення. Спосіб визначення діапазонів можливих значень радіусів кривини монотонної кривої лінії, що інтерполює точковий ряд, за зафіксованих положень дотичних у вихідних точках запропоновано в роботі [4]. Для кривої лінії, вздовж якої радіуси кривини зростають, мінімально можливі значення радіусів кривини в кожній із точок визначаються, виходячи з умови призначення радіуса кривини в першій точці рівним нулю. Максимальні значення радіусів кривини визначаються аналогічно, виходячи з умови призначення в останній точці радіуса кривини, що дорівнює нескінченності. Остаточні значення радіусів кривини у вихідних точках призначаються по центрах отриманих діапазонів.

Призначені у вихідних точках положення дотичних прямих і дотичних кіл визначають область можливого розташування монотонної кривої лінії, яка інтерполює точковий ряд і має у його точках призначені характеристики. Нижня межа області складається з дуги стичного кола в точці i (TC_i) і дуги кола, яке дотичне з TC_i та із прямою t_{i+1} в точці $i + 1$ (Cir_{i+1}) (рис. 1). Верхня межа визначається аналогічно, виходячи із значення радіуса кривини, призначеного в точці $i + 1$ та положення прямої t_i .

Аналогічні області, які визначені вздовж всього точкового ряду, задають ділянку можливого розташування монотонної кривої, що інтерполює вихідний точковий ряд.

У роботі [12] запропоновано спосіб формування обводу дугами кіл, радіуси яких збільшуються в тому самому напрямку, що і радіуси кривини монотонної кривої, яка інтерполює точковий ряд. Недоліком цього способу є порушення регулярності значень кривини в точках стикування дуг кіл.

Формулювання мети статті (постановка завдання). Метою цієї статті є дослідження можливостей CAD-системи SolidWorks щодо формування обводів із регулярною зміною кривини, які із заданою точністю представляють монотонну криву лінію.

Для досягнення поставленої мети потрібно вирішити такі завдання:

- розробити спосіб оцінки точності, з якою опуклий обвід представляє криву лінію з монотонною зміною кривини, якою можна інтерполювати вихідний точений ряд;
- розробити способи формування гладкого опуклого обводу з регулярною зміною кривини, який із заданою точністю інтерполює точковий ряд, дугами еліпсів та В-сплайна;
- порівняти можливості запропонованих способів під час вирішення задачі інтерполяції точкового ряду;

– розробити програмний додаток до CAD-системи для автоматизації запропонованих способів.

Основна частина. Для забезпечення регулярності зміни значень кривини вздовж обводу в точках стикування його ділянок потрібно забезпечити загальні дотичні та значення кривини. Таке завдання можна вирішити, використовуючи ділянки кривих, заданих алгебраїчним рівнянням, параметричне число яких (кількість фіксованих параметрів, які однозначно визначають геометричний образ) не менше ніж чотири. Завдання формування регулярного обводу, який із заданою точністю представляє монотонну криву лінію, досліджуємо, використовуючи криві лінії з відповідним параметричним числом, які використовує CAD-система SolidWorks. Це парабола, еліпс, В-сплайн.

Точність, з якою обвід представляє монотонну криву лінію, оцінюватимемо максимальною абсолютною похибкою інтерполяції – величиною, яку не може перевищувати відстань між обводом і монотонною кривою.

Використання перелічених вище кривих ліній не дає можливості забезпечити монотонну зміну значень кривини вздовж обводу, але дає змогу контролювати його опуклість. Оскільки монотонна крива лінія є опуклою кривою, то як абсолютну похибку інтерполяції на кожній із ділянок використовуватимемо більшу з відстаней між протилежними межами (верхньою та нижньою) областей можливого розташування монотонної і опуклої кривих відповідно.

Якщо у вихідних точках призначені положення дотичних щодо обводу, то областю можливого розташування його ділянки є трикутник $i, i + 1, T$, обмежений відрізком $[i, i + 1]$, що з'єднує послідовні вихідні точки, і дотичними t_i та t_{i+1} (рис. 2).

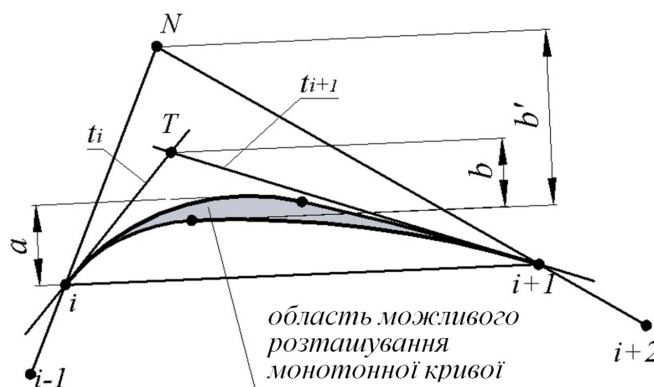


Рис. 2. Область можливого розташування ділянки обводу

У цьому випадку максимальна похибка інтерполяції ділянки $i \dots i + 1$ оцінюється більшою з величин a або b , де:

a – відстань від сторони трикутника $[i, i + 1]$ до прямої, яка дотична до верхньої межі області розташування ділянки монотонної кривої та паралельна відрізку $[i, i + 1]$;

b – відстань від вершини трикутника T до нижньої межі області розташування ділянки монотонної кривої.

Якщо положення дотичних щодо опуклого обводу невідомі, то область можливого розташування ділянки обводу $i \dots i + 1$ можна визначити як трикутник $i, i + 1, N$, обмежений прямими $[i - 1, i]$, $[i, i + 1]$, $[i + 1, i + 2]$ (рис. 2). У цьому випадку похибка інтерполяції ділянок оцінюється більшою з величин a або b' , де b' – відстань від нижньої межі області розташування монотонної кривої до точки перетину прямих $[i - 1, i]$, $[i + 1, i + 2]$ (точка N). Величина b' перевищує величину b приблизно вдвічі і саме вона здебільшого визначатиме похибку інтерполяції обводом, у вихідних точках якого положення дотичних не визначені.

У разі формування обводу, що представляє монотонну криву лінію, доцільно призначати положення дотичних у вихідних точках, за яких точковий ряд можна інтерполювати монотонною кривою [12].

Гладке стикування ділянок може бути забезпечено в разі формування обводу кривою лінією, параметричне число якої не менше ніж чотири. Для ділянки $i \dots i + 1$ двома умовами, що накладаються на криву лінію, є проходження через зафіксовані вихідні точки i та $i + 1$, а торкання з прямими t_i та t_{i+1} становить третю та четверту умови. Для забезпечення регулярності зміни кривини вздовж обводу параметричне число кривих ліній, що становлять його ділянки, має перевищувати чотири.

Параметричне число кривої лінії, яка задана алгебраїчним рівнянням, можна визначити кількістю коефіцієнтів його рівняння. Для параболи, загальне рівняння якої $Ay^2 + Bxy + Cx + Dy + 1 = 0$ [13], параметричне число дорівнює чотирьом. Тому умови проходження через дві зафіксовані точки та торкання з двома зафіксованими прямими повністю визначають криву. Накладення додаткових умов на ділянку параболи для забезпечення рівності значень кривини в точках стикування ділянок обводу неможливе.

Загальне рівняння еліпса має вигляд

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 1 = 0. \quad (1)$$

Кількість коефіцієнтів рівняння визначає параметричне число кривої, що дорівнює п'яти. Покажемо, як можливість накладання на ділянку обводу п'яти умов дає змогу забезпечити його регулярність.

Після призначення у вихідних точках дотичних до монотонної кривої лінії прямих чотири з п'яти умов, що визначають кожну з ділянок обводу, визначено. П'ятою умовою, що визначає дугу еліпса, яка становить першу ділянку обводу, призначимо його проходження через точку K , зафіксовану в межах області можливого розташування ділянки кривої монотонної лінії. Наприклад, точка K може бути призначена на медіані трикутника, який обмежує область можливого розташування ділянок опуклої кривої, на рівних відстанях від точок перетину медіани з межами області розташування монотонної кривої.

Умови проходження дуги еліпса через точки $1(x_1, y_1)$ та $2(x_2, y_2)$, які обмежують ділянку, і точку $K(x_K, y_K)$ визначають такі співвідношення:

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + 1 = 0, \quad (2)$$

$$Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + 1 = 0, \quad (3)$$

$$Ax_K^2 + Bx_Ky_K + Cy_K^2 + Dx_K + Ey_K + 1 = 0. \quad (4)$$

Продиференціювавши рівняння (2) та (3) отримаємо:

$$2Ax_1 + B(y_1 + x_1y'_1) + 2Cy_1y'_1 + D + Ey'_1 = 0, \quad (5)$$

$$2Ax_2 + B(y_2 + x_2y'_2) + 2Cy_2y'_2 + D + Ey'_2 = 0. \quad (6)$$

Якщо дотичні до монотонної кривої лінії в точках 1 та 2 задати рівняннями $y = xa_1 + b_1$ та $y = xa_2 + b_2$ відповідно, значення похідних функції в рівняннях (5) і (6) визначаються як $y'_1 = a_1$, $y'_2 = a_2$.

Розв'язавши систему з п'яти рівнянь (2), (3), (4), (5), (6), визначимо значення коефіцієнтів A , B , C , D , E і отримаємо рівняння, що задає першу ділянку обводу у вигляді (1).

Для визначення значення другої похідної функції, що визначає еліпс, у точці 2 потрібно двічі продиференціювати рівняння (1) і підставити в нього координати точки $2(x_2, y_2)$. Виділивши з рівняння другу похідну функції отримаємо:

$$y'' = -\frac{2Bx_2 + 2Cy_2 + E}{2A + 4By' + 2C(y')^2}, \quad (7)$$

де $y' = -\frac{2Bx_2 + 2Cy_2 + E}{2Ax_2 + 2By_2 + D}$.

Для регулярного стикування першої та другої ділянок обводу, крім загальної дотичної в точці 2, достатньо забезпечити рівність других похідних функцій, що задають дуги еліпсів, у цій точці.

Для визначення коефіцієнтів рівняння, яке задає еліпс, що становить другу ділянку обводу, потрібно вирішити систему з п'яти рівнянь:

- рівняння (3) та (6);
- рівняння (7), у яке підставлені значення коефіцієнтів рівняння, що задає дугу еліпса першої ділянки обводу;
- рівняння, що визначають характеристики обводу в точці 3:

$$Ax_3^2 + Bx_3y_3 + Cy_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + 1 = 0,$$

$$2Ax_3 + B(y_3 + x_3y'_3) + 2Cy_3y'_3 + D + Ey'_3 = 0.$$

Перша та друга ділянки обводу, характеристики якого розраховані за описаною вище методикою, представлені на рис. 3.

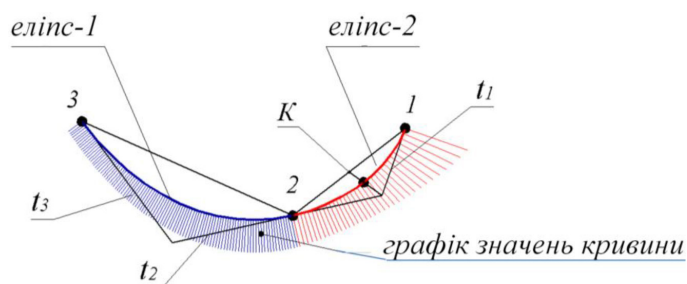


Рис. 3. Формування обводу дугами еліпсів

Обвід сформовано в CAD-системі SolidWorks за допомогою спеціально розробленого програмного модуля. Як вихідні дані взято точковий ряд, що належить монотонній кривій лінії, інтерполяція якого досліджена в роботі [12]. Графік значень кривини вздовж обводу, сформований за допомогою функцій CAD-системи, демонструє регулярність стикування ділянок. Максимальна абсолютна похибка інтерполяції становила 0,8735 мм на першій ділянці і 0,6328 мм – на другій.

Максимальне відхилення обводу від меж області можливого розташування монотонної кривої лінії на кожній із ділянок становило 0,0121 і 0,0053 мм відповідно. Монотонна зміна значень кривини вздовж дуг еліпсів, що формують ділянки обводу, визначила їхнє розташування в межах області розташування монотонної кривої лінії. Однак способи, що дають можливість заздалегідь прогнозувати відсутність точок з екстремальним значенням кривини в межах дуги еліпса, заданої характеристиками в граничних точках, нам невідомі.

Після визначення коефіцієнтів, що задають рівняння еліпса, який становить другу ділянку обводу, аналогічно визначаються рівняння третьої та наступних ділянок. При цьому п'ятою умовою, що визначає конфігурацію кожної з дуг еліпсів, є рівність похідних із попередньою ділянкою обводу в точці стикування.

Недоліком запропонованої методики формування обводу є відсутність можливості локального коригування його форми. Зміна конфігурації першої ділянки обводу призведе до зміни конфігурацій решти ділянок. Причиною зазначеного недоліку є накладення максимально можливої кількості умов на кожну з ділянок обводу.

Можливість локального коригування форми ділянок є основною перевагою обводів, що формуються В-сплайном. Ступінь рівняння, що задає В-сплайн, визначає порядок похідних функції, значення яких збігаються в точках стикування ділянок сплайна [11]. Рівняння третього ступеня, що задає ділянки В-сплайна, який використовує CAD-система SolidWorks, автоматично забезпечує регулярність зміни значень кривини вздовж обводу будь-якої конфігурації.

Інтерполяція точкового ряду в CAD-системі здійснюється в інтерактивному режимі – вихідні точки послідовно вказуються за допомогою курсору. Якщо вихідний точковий ряд можна інтерполювати опуклою кривою лінією, то сплайн формується у вигляді опуклого обводу, число ділянок якого мінімальне – кожна ділянка обводу формується однією ділянкою сплайна. Вказана послідовність команд легко реалізується створеним нами програмним додатком, який забезпечує автоматичне формування опуклого обводу в CAD-системі SolidWorks.

Накладання на В-сплайн умови торкання із зафіксованими прямими лініями потребує збільшення параметричного числа кривої лінії через збільшення кількості ділянок сплайна. Це може призвести до порушення опуклості обводу. У CAD-системах опуклість В-сплайн можна забезпечити в інтерактивному режимі шляхом коригування положення вершин багатокутника, що задає сплайн. За великої кількості вихідних точок і призначених у них дотичних таке завдання стає надмірно трудомістким.

Можливість використання стандартних функцій SolidWorks для забезпечення необхідної точності інтерполяції В-сплайном послідовності точок, що призначені на монотонній кривій лінії, розглянемо на наступному прикладі.

На рис. 4 зображено сформований у CAD-системі SolidWorks кубічний неперіодичний В-сплайн, що інтерполює точковий ряд, який складається із 10 точок. Як вихідний точковий ряд взято послідовність точок, яка була використана в роботі [12] для визначення області розташування монотонної кривої лінії.

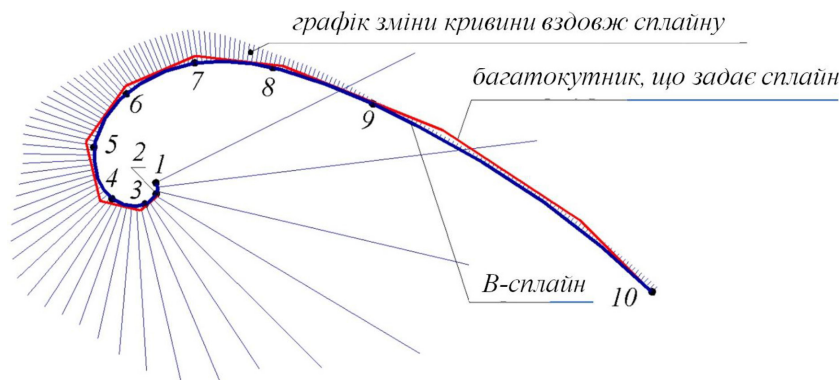


Рис. 4. В-сплайн, заданий координатами вихідних точок

Сплайн складається з 9 сегментів, конфігурацію яких визначають 12 точок, що його задають. Графік зміни значень кривини вздовж В-сплайна, який сформовано за допомогою функцій САД-системи, дає змогу визначити наявність у нього особливих точок. Ділянки сплайна сумарно містять сім точок з екстремальним значенням кривини.

У таблиці 1 представлені характеристики вихідного точкового ряду та значення похибок його інтерполяції В-сплайном, де:

- 1) $h_i = |i, i + 1|$ – довжини відрізків, що з’єднують вихідні точки;
- 2) δ_i – максимальна абсолютна похибка інтерполяції точкового ряду монотонною кривою лінією;
- 3) ширина області можливого розташування ділянок опуклого обводу, яка дорівнює:
 - відстані H_i від відрізка $[i, i + 1]$ до точки перетину прямих $(i - 1, i)$ та $(i + 1, i + 2)$;
 - відстані H'_i від відрізка $[i, i + 1]$ до точки перетину дотичних t_i та t_{i+1} ;



- 4) абсолютна похибка, з якою монотонну криву лінію представляють ділянки обводу:
- Δ_i , коли обвід заданий точковим рядом;
 - Δ'_i , коли обвід заданий точковим рядом і положенням дотичних у вихідних точках;
- 5) f_i – максимальна відстань від сформованого В-сплайна до найбільш віддаленої межі області можливого розташування ділянок монотонної кривої лінії.

Таблиця 1

Характеристики вихідного точкового ряду та значення похибок його інтерполяції В-сплайном

i	h_i	δ_i	H_i	H'_i	Δ_i	Δ'_i	f_i
1	5,28	0,0140	3,1408	1,6068	2,4075	0,8735	0,1500
2	7,20	0,0078	4,4045	1,2234	3,8139	0,6328	0,0824
3	15,57	0,0218	11,7259	4,2358	9,8524	2,3623	0,1440
4	25,24	0,0595	18,3244	8,1017	14,3855	4,1628	0,6637
5	28,82	0,0629	12,6391	4,7848	10,4325	2,5782	0,4586
6	34,90	0,0922	10,4670	5,2981	7,8280	2,6591	0,3054
7	36,29	0,2184	6,8370	3,2593	5,2685	1,6908	0,1534
8	49,65	0,2257	6,7010	2,6676	5,4764	1,4320	0,1712
9	155,96	1,1281	19,7329	10,6813	14,8909	5,8393	1,5414

Виконання умови дотику з десятима зафіксованими дотичними до монотонної кривої, призначеними у вихідних точках, потребувало збільшення параметричного числа сплайна через збільшення кількості його сегментів. Отриманий В-сплайн складається із 14 сегментів, конфігурацію яких визначають 16 точок, що його задають. За результатами коригування конфігурації В-сплайна з використанням інструментів CAD-системи SolidWorks «Елемент управління додаванням дотику», «Елемент управління додаванням кривини» і «Маркери сплайна» вдалося досягти опуклості всього обводу та відсутності особливих точок не більше ніж на його ділянках 6...7, 7...8, 8...9 та 9...10.

Отриманий сплайн є опуклою кривою лінією, яка містить 13 точок з екстремальним значенням кривини. На ділянках, що містять особливі точки, сплайн розташовано за межами області можливого розташування монотонної кривої лінії, максимальне відхилення від якої становило 0,1182 мм на ділянці 3...4. На ділянках 6...7, 7...8, 8...9, 9...10, де значення кривини змінюються монотонно, сплайн розташовано всередині області розташування відповідних ділянок монотонної кривої.

Похибка інтерполяції обводом, що складається з дуг еліпсів, аналогічна похибці інтерполяції В-сплайном, який має у вихідних точках загальні дотичні з монотонною кривою. Максимальна похибка інтерполяції всього точкового ряду визначається ділянкою обводу, на якому величини Δ_i або Δ'_i мають найбільше значення. Такими ділянками будуть найбільш протяжні або ті, на яких викривленість обводу максимальна. Для обводу, наведеного в таблиці 1, це ділянка № 9, для якої $\Delta_i = 14,8909$, $\Delta'_i = 5,8393$.

Справжнє розташування опуклого обводу щодо меж області розташування монотонної кривої залежить від характеристик обводу на конкретних ділянках. У разі монотонної зміни значень кривини вздовж ділянки обводу та загальних дотичних із монотонною кривою на її межах відхилення обводу від меж області розташування монотонної кривої не перевищує ширину цієї області. Якщо ділянка обводу містить точки з екстремальним значенням кривини, то способи, що дають можливість заздалегідь визначити його розташування всередині області опуклої кривої, нам невідомі. Можна гарантувати, що похибка подання монотонної кривої лінії опуклим обводом не перевищує максимальної відстані між межами їх можливого розташування. Цю похибку можна скільки завгодно зменшити шляхом збільшення кількості вихідних точок.



Створення програми, яка забезпечує автоматичне формування опуклого регулярного В-сплайна, заданого послідовністю вихідних точок і положенням дотичних у них, є складним завданням. Приклади вирішення цього завдання нам невідомі. У разі формування В-сплайна, який із заданою точністю представляє монотонну лінію, найпростішим і ефективнішим рішенням буде збільшення кількості вихідних точок, які можна інтерполювати монотонною кривою.

Зменшення похибки інтерполяції через збільшення кількості вихідних точок продемонструємо на прикладі заміни евольвенти кола опуклим В-сплайном.

Евольвента кола є монотонною кривою, вздовж якої значення кривини зменшуються. Її параметричне рівняння має вигляд [2]:

$$x = r \cos \varphi + r\varphi \sin \varphi;$$

$$y = r \sin \varphi - r\varphi \cos \varphi,$$

де r – радіус кола (еволюти), що визначає евольвенту;

φ – кут, що відповідає дузі евольвенти.

Координати точок, що належать евольвенті кола і склали вихідний точковий ряд для інтерполяції В-сплайном, отримані для кроку зміни значень параметра $\Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i = 1$, починаючи з точки, що визначається значенням параметра $\varphi_i = 0$.

Значення похибки інтерполяцією перших 10 точок точкового ряду опуклим обводом, у точках якого положення дотичних не визначено (Δ_i), представлені в таблиці 2.

За допомогою розробленого нами програмного забезпечення отриманий точковий ряд інтерпольовано кубічним сплайном, який імпортовано в САД-систему SolidWorks. На рис. 6 зображено ділянку обводу, сформованого В-сплайном, і графік зміни кривини вздовж нього.

Таблиця 2

Значення похибок інтерполяції точкового ряду опуклим обводом

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h_i, \cdot 10^{-2}, \text{ мм}$	1,60	2,67	3,73	4,80	5,86	6,93	7,97	9,06	10,13	11,19
$\Delta_i, \cdot 10^{-4}, \text{ мм}$	1,30	2,29	3,233	4,169	5,103	6,036	6,968	7,90	8,83	9,76

Точність, з якою В-сплайн представляє евольвенту кола, забезпечує графік зміни значень кривини вздовж обводу, який інструменти САД-системи визначають як монотонний.

Висновки. У роботі досліджено можливість формування в САД-системі SolidWorks гладкого регулярного обводу, який із заданою точністю представляє монотонну криву лінію. Криві, ділянками яких можна формувати регулярний обвід, не дають можливості забезпечити монотонну зміну значень кривини вздовж обводу, але дають змогу контролювати його опуклість. Тому як абсолютну похибку інтерполяції на кожній із ділянок запропоновано використовувати найбільшу відстань між областями можливого розташування монотонної і опуклої кривих ліній, заданих тим самим точковим рядом.

Будь-яку криву лінію можна розглядати як таку, що складається з монотонних частин. Тому припущення про те, що якщо послідовність точок можна інтерполювати монотонною кривою лінією, то вихідна крива лінія, на якій ці точки були призначені, є монотонною, що дає змогу використовувати запропонований підхід для оцінки похибки інтерполяції точкового ряду довільної конфігурації.

Запропоновані критерії оцінки точності інтерполяції у разі формування обводів, заданих вихідним точковим рядом і точковим рядом, у точках якого задані положення дотичних щодо монотонної кривої прямих дають можливість розробити способи формування обводів дугами різних кривих ліній, опуклість яких можна контролювати. На основі запропонованих критеріїв

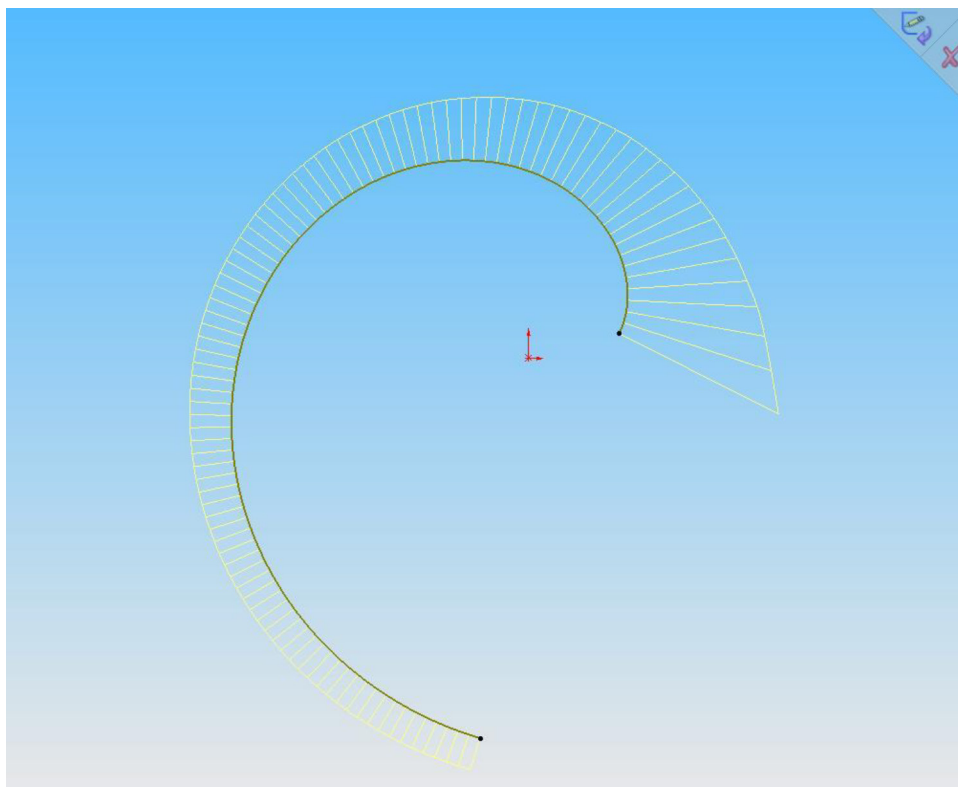


Рис. 5. Подання евольвенти кола В-сплайном

оцінки похибки інтерполяції розроблені способи формування опуклих регулярних обводів із дуг еліпсів та В-сплайна. Способи реалізовані в програмному додатку, який автоматично створює обводи в CAD-системі SolidWorks. Спосіб формування обводу дугами еліпса заснований на рівняннях, що задають еліпси, і визначених за цими рівняннями параметрах, які дають можливість формувати ділянки обводу в системі SolidWorks. Такими параметрами є координати точок, що обмежують ділянку обводу, положення прямих дотичних до монотонної кривої лінії в цих точках і координати ще однієї точки, що належить еліпсу.

Створений додаток для формування обводів В-сплайном забезпечує його проходження через послідовність точок, заданих своїми координатами.

Спосіб формування обводів дугами еліпсів враховує положення дотичних до обводу прямих і забезпечує більшу точність інтерполяції. Спосіб формування обводів В-сплайном потребує меншого обсягу обчислень і легше реалізується у вигляді програмного забезпечення.

Можливості способу формування обводів В-сплайном досліджені під час вирішення завдань:

- інтерполяції точкового ряду, що складається з десяти точок, які задають монотонну криву лінію;
- інтерполяції точкового ряду, що належить евольвенті кола.

Дослідження доводить, що домогтися якомога малої похибки інтерполяції можна шляхом зменшення відстаней між вихідними точками, що належать до монотонної кривої, через збільшення їх кількості. Послідовність точок, що інтерполюються, може бути збільшена як шляхом уточнення вихідних даних, так і завдяки призначенню проміжних точок за методикою, запропонованою в [12].

Розроблені способи доцільно застосовувати в моделюванні лінійних елементів каркаса функціональних поверхонь з підвищеними аеро- і гідродинамічними властивостями, для яких мінімальна кількість особливих точок є основним критерієм якості отриманого розв'язку.

Перевагою запропонованих у роботі способів перед розробленим у роботі [12] способом представлення монотонної кривої лінії обводом, сформованим дугами кіл, є регулярна зміна значень кривини. Перевагою способу, запропонованому в [12], є монотонна зміна значень кривини вздовж обводу. Обидві із зазначених характеристик є важливими для моделювання функціональних поверхонь. Для вирішення конкретних завдань заздалегідь встановити пріоритет однієї із характеристик неможливо, оскільки він залежатиме від умов задачі. Такими умовами є швидкість переміщення потоку середовища вздовж поверхні та фізичні характеристики середовища (щільність, в'язкість та інші).

Ступінь впливу якості стикування ділянок обводу та закономірності зміни вздовж нього значень кривини можна встановити за результатами експерименту.

Універсальним способом збільшення точності, з якою регулярний обвід представляє монотонну криву, і зменшення різниці значень кривини в точках стикування дуг кіл є збільшення кількості точок, що інтерполюються. Задачу інтерполяції відповідної кількості точок дає змогу розв'язати створене на основі наших досліджень програмне забезпечення.

Список використаних джерел

1. Гавриленко Є. А., Холодняк Ю. В., Найдиш А. В., Лебедев В. А. Створення САД-моделей поверхонь із використанням спеціалізованого програмного забезпечення. *Прикладні питання математичного моделювання*. Херсон : ХНТУ, 2020. Т. 3, № 2.2. С. 66–75.
2. Ковальов Ю. М. Основи геометричного моделювання : навч. посіб. Київ : Вища школа, 2003. 231 с.
3. Найдиш В. М. Дискретна інтерполяція : навч. посіб. Мелітополь : Люкс, 2008. 250 с.
4. Холодняк Ю. В. Варіативне дискретне геометричне моделювання обводів на основі базисних трикутників по заданому закону зміни кривини : автореф. дис. ... канд. техн. наук. Мелітополь, 2016. 24 с.
5. Czerech L., Kaczyski R., Werner A. Machining error compensation for objects bounded by curvilinear surfaces. *Acta Mech. Autom.* 2012. Vol. 6. P. 26–30.
6. Jadhav Y. P., Chougule V. N., Mulay A. V. Free-form surface models generation using reverse engineering techniques – an investigation. *J. Mech. Civ. Eng.* 2006. P. 379–385. DOI: 10.9790/1684-15008030311-15
7. Pérez-Arribas F., Pérez-Fernández R. A B-spline design model for propeller blades. *Adv. Eng. Softw.* 2018. Vol. 118. P. 35–44. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2018.01.005
8. Fooladi M., Foroud A.A. Recognition and assessment of different factors which affect flicker in wind turbine. *IET Renew. Power Gener.* 2015. Vol. 10. P. 250–259. DOI: 10.1049/iet-rpg.2014.0419
9. Chekalin A. A., Reshetnikov M. K., Shpilev V. V., Borodulina S. V. Design of Engineering Surfaces Using Quartic Parabolas. *IOP Conf.-Ser. Sci. Eng.* 2017. Vol. 221, 012015. DOI: 10.1088/1757-899X/221/1/012015
10. Shen W., Wang G., Huang F. Direction monotonicity of a rational Bézier curve. *Appl. Math.* 2016. Vol. 31. P. 1–20. DOI: 10.1007/s11766-016-3399-7
11. Okaniwa S., Nasri A., Lin H., Abbas A., Kineri, Y., Maekawa T. Uniform B-Spline Curve Interpolation with Prescribed Tangent and Curvature Vectors. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.* 2016. Vol. 18. P. 1474–1487. DOI: 10.1109/TVCG.2011.262.
12. Havrylenko Ye., Kholodniak Yu., Halko S., Vershkov O., Bondarenko L., Suprun O., Miroshnyk O., Shchur T., Śrutek M., Gackowska M. Interpolation with Specified Error of a Point Series Belonging to a Monotone Curve. *Entropy*. 2021. Vol. 23 (5), 493. DOI: 10.3390/e23050493
13. Ashyralyev A., Sobolevskii P. *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*. Birkhäuser: Germany, 2004. 446 p.

Стаття надійшла до редакції 25.10.2025

Стаття прийнята 15.11.2025

Статтю опубліковано 22.12.2025





Ye. Havrylenko, O. Mykhailenko
Dmytro Motornyi Tavria State Agrrotechnological University

SOLVING INTERPOLATION PROBLEMS IN THE SOLIDWORKS CAD-SYSTEM

Summary

The paper examines the capabilities of a CAD system for solving interpolation problems. The problem of modelling a smooth contour with a regular change in curvature representing a monotone curve with specified accuracy is solved in the article. The contour is formed within the area of possible location of a convex curve, which can interpolate a point series. The assumption that if a sequence of points can be interpolated by a monotone curve, the original curve on which these points have been assigned is monotone, allows to use the proposed approach to estimate interpolation error of a point series of arbitrary configuration. The proposed methods for forming a convex regular contour by arcs of ellipses and B-spline ensure interpolation of any point series in parts that can be interpolated by a monotone curve. At the same time, deviation of the contour from the boundaries of the area of possible location of the monotone curve is controlled.

The study demonstrates that it is possible to achieve an arbitrarily small interpolation error by decreasing the distances between initial points on a monotonic curve by increasing their number. The sequence of interpolated points can be increased both by refining the initial data and by assigning intermediate points. The possibilities of the developed methods are tested while solving problems of interpolation of a point series belonging to monotone curves. The problems are solved in the CAD system SolidWorks with the use of software application created on the basis of the methods developed in the research work. The developed methods are appropriate for use in modeling linear elements of the framework of functional surfaces with enhanced aerodynamic and hydrodynamic properties, for which the minimum number of singular points is the main criterion for the quality of the resulting solution.

Keywords: interpolation, tangent line, curvature, area of location of the curve, contour, error, CAD-system, software application.