УДК 514.182.7:519.651 DOI: 10.31388/2220-8674-2019-1-63

АЛГОРИТМ ЗГУЩЕННЯ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ КРИВИХ НА ОСНОВІ ТОТОЖНОСТЕЙ ІЗ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯМ ВІДСУТНОСТІ ОСЦИЛЯЦІЇ

Щербина В. М., к.т.н., https://orcid.org/0000-0002-0616-8010
Пихтєєва І. В., к.т.н., https://orcid.org/0000-0001-7484-1759
Бондаренко Л. Ю., к.т.н. https://orcid.org/0000-0001-5858-7375
Таврійський державний агротехнологічний університет
Тел. (0619) 42-24-36

Анотація – інтерполяція (згущення) дискретно представлених кривих (ДПК) надає можливість більш точного уяснення динаміки протекання того, чи іншого процесу, та пов'язана із визначенням оптимальних або необхідних результатів досліджень. Відомо, що одним, більш розвиненим, напрямком розвитку методів згущення дискретно представлених кривих (ДПК) є згущення на основі тотожностей. У даній роботі розглядається вплив формули згущення на основі базисного 3-полінома на різницеву схему, отриману на основі тотожностей згущення. Визначається, що властивість цього впливу використовується у алгоритмі методу згущення на основі тотожностей з урахуванням корекції в області розв'язку. Також, в роботі, визначається, що запропонована різницева схема дає можливість корекції розв'язку і отримання не осцилюючого однозначного ряду довільної конфігурації.

***Ключові* слова:** 2-поліном, базисний 3-поліном, різницева схема, тотожність згущення.

Постановка проблеми. Метод згущення ДПК на основі тотожностей використовується у багатьох випадках вирішення задач, пов'язаних із застосуванням методики згущення експериментально отриманих точкових рядів, як результатів досліджень, і, на наш погляд, є найбільш розвиненим методом інтерполяції. Однак, застосування пропонованого методу, не дозволяє, в повній мірі, врахувати всі аспекти.

Аналіз останніх досліджень. На рисунку 1 представлено схему визначення залежностей між кутовими та лінійними параметрами згущення.

В даному випадку основну тотожність можна записати у вигляді:

$$\delta^1_{0,5} + 2\delta^1_1 + \delta^1_{1,5} = \delta^0_1 ,$$

або, у загальному вигляді:

$$\delta^1_{i-0,5} + 2\delta^1_i + \delta^1_{i+0,5} = \delta^0_i . \qquad i = \overline{1;n-1} \tag{1}$$

Одним з них є спосіб згущення на основі тотожності (1) для рівномірної сітки [1].

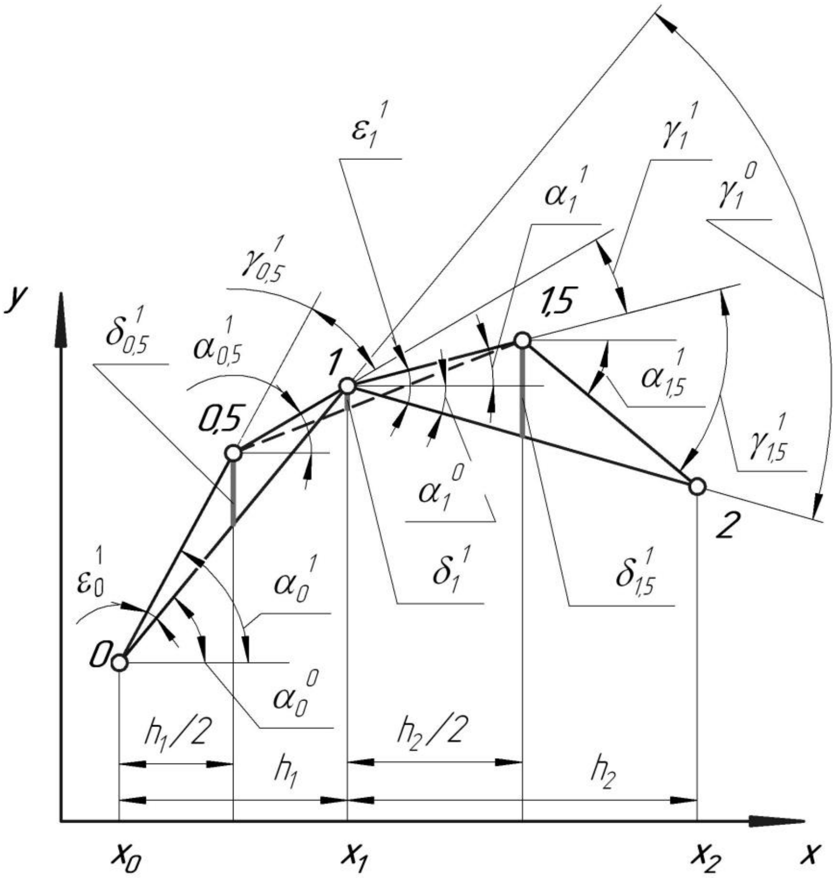

Рисунок 1 – Визначення залежностей між кутовими та лінійними параметрами згущення для ДПК, представленій на нерівномірний сітці

Привабливість такого способу визначається тим, що на співвідношення між значеннями δ^1 можна накласти різні умови. Найбільш відомими є спосіб δ^1_{min}, або δ^1_{cp}, а наявнисть рівномірної сітки значно спрощує розрахункові алгоритми. Ці способи дають можливість детермінованого розрахунку точок згущення й не орієнтовані на коректування рішення.

У рамках дискретно-параметричного методу, запропонованого Верещагою В.М. [2] основою є вибір рішення і його корекція в напрямку досягнення заданих вимог. Однак, такий підхід до вирішення поставлених завдань не взмозі надати найбільш достовірні результати, оскільки можливості коректування рішення досить обмежені.

Формулювання цілей статті. Для усунення зазначених недоліків необхідно розглянути інші можливості методу згущення на основі тотожностей. Результати досліджень, викладені в цій роботі направлені на встановлення зв'язку різницевої схеми, отриманої на основі тотожностей згущення, із формулою згущення на основі базисного 3-полінома та виявлення властивостей цього зв'язку.

Основна частина.

Для довільної $i-$ тої точки згущуваного дискретного ряду основна тотожність згущення має вигляд (1). При цьому

$$\delta_{i-0,5}^{1} = y_{i-1} - 2y_{i-0,5} + y_i, \ldots, \qquad \delta_i^0 = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}$$

Виходячи з цього, поліном другого порядку має наступну властивість:

$$y_{i-0,5} - 2y_i + y_{i+0,5} = \delta_i^1 = const, \tag{2}$$

Враховуючи (1), умова $\delta_i^1 = const$ обумовлює наступну залежність:

$$\delta_{i-0,5}^1 = \delta_i^1 = \delta_{i+0,5}^1 = \frac{1}{4}\delta_i^0, \tag{3}$$

це означає, що умова (3) формує у вузлах згущеної ДПК нову різницю, що відповідає 2-поліному.

Виконання тотожності для 3-полінома обумовлює виникнення наступної системи рівнянь:

$$-\begin{cases} \delta_{i-0,5}^1 - \delta_i^1 = a, \\ \delta_i^1 - \delta_{i+0,5}^1 = a, \end{cases} \tag{4}$$

$$\delta_{i-0,5}^1 - 2\delta_i^1 + \delta_{i+0,5}^1 = 0, \tag{5}$$

де $a-$деякий параметр.

При згущенні в околі вузлової точки рівняння 3-полінома, сумісно з основною тотожністю згущення, має вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{i-0,5}^1 - 2\delta_i^1 + \delta_{i+0,5}^1 = 0, \\ \delta_{i-0,5}^1 + 2\delta_i^1 + \delta_{i+0,5}^1 = \delta_i^0. \end{cases}$$

Виходячи з цього, різницева схема для рівномірної сітки приймає вигляд:

$$\delta_{i-0,5}^1 + \delta_{i+0,5}^1 = \frac{1}{2}\delta_i^0, \tag{6}$$

та відображує формування шуканого згущення за допомогою 3-полінома.

Зі згущення на основі базисного 3-полінома [3] маємо:

$$\delta^1_{i+0,5} = \frac{\delta^0_i + \delta^0_{i+1}}{8} \tag{7}$$

Враховуючи, що $\delta^1_{i-0,5} = \dfrac{\delta^0_{i-1} + \delta^0_i}{8}$, на основі (6) і (7) маємо:

$$\delta^1_{i-0,5} + \delta^1_{i+0,5} = \frac{1}{8}\left(\delta^0_{i-1} + 2\delta^0_i + \delta^0_{i+1}\right) = \frac{\delta^{-1}_i}{8}; \tag{8}$$

де $\delta^{-1}_i = \delta^0_{i-1} + 2\delta^0_i + \delta^0_{i+1}$- друга різниця (апріорна інформація) в припущенні, що апріорно була задана ДПК y_{i-2}, y_i, y_{i+2} (через одну точку), а решта точок … y_{i-1}, y_{i+1} … - побудована в процесі деякого згущення, тобто:

$$\delta^{-1}_i = y_{i-2} - 2y_i + y_{i+2}. \tag{9}$$

Рівняння (8) і (6) будуть збігатися тоді, коли

$$\frac{1}{2}\delta^0_i = \frac{1}{8}\delta^{-1}_i \ . \tag{10}$$

Або

$$4\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right) = y_{i-2} - 2y_i + y_{i+2};$$

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = 0. \tag{11}$$

Виходячи із вищезазначеного можна зробити висновок, що згущення за допомогою 3-полінома (див. (7)) і рішення системи (6), коли 5 точок $y_{i-2},...,y_{i+2}$ розташовані на 3-поліномі, дає однакові результати.

Виходячи із аналізу рівняння (6) можна зробити висновок, що точки y_{i-1}, $y_{i-0,5}$, y_i, $y_{i+0,5}$, y_{i+1} лежать на одному 3-поліномі. А із аналізу рівняння (7) також можна зробити висновок, що точки y_{i-1}, y_i, $y_{i+0,5}$, y_{i+1}, y_{i+2} також лежать на одному 3-поліномі.

Іншого і не слід було очікувати, тому що це різні поліноми.

Саме цю особливість зв’язку різницевої схеми із рівнянням згущення на основі базисного 3-полінома можна застосувати при вирішенні зачач згущення ДПК на основі тотожностей.

Алгоритм метода згущення на основі тотожностей з урахуванням корекції в області розв'язку.

Для програмної реалізації запропонованого алгоритму метода згущення на основі тотожностей з урахуванням корекції вихідних результатів усередині області розв'язку слід зазначити, що представлений алготитм декілька відрізняється при завдвнні необхідної кількості точок згущення (парної чи не парної кількості).

Вихідні значення для обох варіантів розрахунку однакові. Це значення y_i, $i=\overline{0;n}$, на однорідній сітці з кроком h.

Алгоритм згущення за умови, що кількість заданих точок парна.

1) Знаходимо δ_i^0 за формулою $\delta_i^0 = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}$, де $i=\overline{1;n-1}$;

2) Складаємо систему рівнянь за умовами:

$$\delta_{i-0,5}^1 + \delta_{i+0,5}^1 = \frac{1}{2}\delta_1^0 > 0 \quad \text{для } \delta^1 > 0 \text{ (ДПК опукла донизу)},$$

$$\delta_{i-0,5}^1 + \delta_{i+0,5}^1 = \frac{1}{2}\delta_1^0 < 0 \quad \text{для } \delta^1 < 0 \text{ (ДПК опукла вгору)};$$

3) Виражаємо всі $\delta_{i+0,5}^1$, $i=\overline{1;n-1}$, через $\delta_{0,5}^1$.

4) Визначаємо обмеження для вибору $\delta_{0,5}^1$ за формулою:

для $\delta^1 > 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{0,5}^1 > \max \left[0; \frac{1}{2}\left(\delta_1^0 - \delta_2^0\right); \frac{1}{2}\left(\delta_1^0 - \delta_2^0 + \delta_3^0 - \delta_4^0\right); \ldots \frac{1}{2}\left(\delta_1^0 - \delta_2^0 + \delta_3^0 - \ldots - \delta_{n-2}^0\right)\right], \\ &\delta_{0,5}^1 < \min \left[\frac{1}{2}\delta_1^0; \frac{1}{2}\left(\delta_1^0 - \delta_2^0 + \delta_3^0\right); \ldots \frac{1}{2}\left(\delta_1^0 - \delta_2^0 + \delta_3^0 - \ldots + \delta_{n-1}^0\right)\right], \end{aligned}\right\} n - \text{парне}$$

для $\delta^1 < 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\delta^1_{0,5} > max \quad \left[\frac{1}{2}\delta^0_1;\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3\right);...\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3-...+\delta^0_{n-1}\right)\right],\\ \delta^1_{0,5} < min \quad \left[0;\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2\right);\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3-\delta^0_4\right);...\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3-...-\delta^0_{n-2}\right)\right],\end{array}\right\} n - \text{парне}$$

5) Розраховуємо

$$\overline{\delta^1_{0,5}} = \mu\cdot max(\delta^1_{0,5}) + (1-\mu)\cdot min(\delta^1_{0,5}), \qquad \mu=\overline{\mu}\in[0;1];$$

6) Розраховуємо всі $\delta^1_{i+0,5}$ через $\overline{\delta^1_{0,5}}$ згідно із залежністю (6);

7) Визначаємо точки згущення за формулою:

$$y_{i+0,5} = \frac{1}{2}\left(y_i + y_{i+1} - \delta^1_{i+0,5}\right), \qquad i=\overline{0;n-1};$$

8) При необхідності подальшого згущення (наступний крок), точки перенумеровуємо й повторюємо всі розрахунки спочатку.

Алгоритм згущення за умови, що кількість заданих точок непарна.

В даному випадку пункти 1-3 та 5-8 попереднього алгоритму згущення (коли кількість заданих точок парна) повторюються в повній мірі, а 4 пункт має наступний вигляд.

4) Визначаємо обмеження для вибору $\delta^1_{0,5}$ за формулою:

для $\delta^1 > 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\delta^1_{0,5} > max \quad \left[0;\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2\right);\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3-\delta^0_4\right);...\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3-...-\delta^0_{n-1}\right)\right],\\ \delta^1_{0,5} < min \quad \left[\frac{1}{2}\delta^0_1;\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3\right);...\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3-...+\delta^0_{n-2}\right)\right];\end{array}\right\} n - \text{не парне}$$

для $\delta^1 < 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\delta^1_{0,5} > max \quad \left[\frac{1}{2}\delta^0_1;\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3\right);...\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3-...+\delta^0_{n-2}\right)\right],\\ \delta^1_{0,5} < min \quad \left[0;\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2\right);\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3-\delta^0_4\right);...\frac{1}{2}\left(\delta^0_1-\delta^0_2+\delta^0_3-...-\delta^0_{n-1}\right)\right].\end{array}\right\} n - \text{не парне}$$

Висновок. На відміну від згущення ДПК на основі базисного 3-поліному різницева схема (6) дає можливість корекції розв'язку і отримання не осцилюючого однозначного ряду довільної конфігурації. Завдяки цьому можна сформувати більш гнучкий алгоритм метода згущення ДПК на основі тотожностей.

Список використаних джерел

1. *Щербина В. М.* Моделирование спиралеобразных дискретно представленных кривых / Виктор Михайлович Щербина [Текст]: Дис. к.т.н.: 05.01.01 - прикладная геометрии,инженерная графика. Научн. конс. д.т.н. В. М. Найдыш. ТГАТА. Мелитополь, 2002. - 139 с.
2. *Верещага В. М.* Дискретно-параметрический метод геометрического моделирования кривых линий и поверхностей: / Виктор Михайлович Верещага [Текст]: Дисс... д-ра техн. наук: 05.01.01. - Мелитополь, 1996. - 320 с.
3. *Тищенко В. І.* Метод базисних функцій в дискретній інтерполяції / В. І. Тищенко, В. М. Найдиш // Праці/Тавр. держ. агротех. акад.-Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка, Т.22. Мелітополь, ТДАТА, 2003, с. 3-8.

АЛГОРИТМ СГУЩЕНИЯ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНЫХ КРИВЫХ НА ОСНОВЕ ТОЖДЕСТВ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ОТСУТСТВИЯ ОСЦИЛЛЯЦИИ

Щербина В.М., Пихтеева И.В., Бондаренко Л.Ю.

Аннотация

Интерполяция (сгущение) дискретно представленных кривых (ДПК) дает возможность более точного уяснения динамики протекания того или иного процесса и связана с определением оптимальных или необходимых результатов исследований. Известно, что одним, более развитым, направлением методики сгущения дискретно представленных кривых (ДПК) является сгущение на основе тождеств. В данной работе рассматривается влияние формулы сгущения на основе базисного 3-полинома на разностную схему, полученную на основе тождеств сгущения. Делается акцент на то, что свойство этого влияния используется в алгоритме метода сгущения на основе тождеств с учетом коррекции в области решения. Также, в работе, отмечено, что предложенная разностная схема дает возможность коррекции решения и получение неосциллирующего однозначного ряда произвольной конфигурации.

***Ключевые* слова:** 2-полином, базисный 3-полином, разностная схема, тождество сгущения.

ALGORITHM OF A CONDENSATION OF DISCRETELY SUBMITTED CURVES ON THE BASIS OF IDENTITIES WITH MAINTENANCE OF ABSENCE OSCILLATION

V. Shcherbina, I. Pihteeva, l. Bondarenko

Summary

Interpolation (condensation) of discretely submitted curves (DSC) enables more exact explanation of dynamics of course of this or that process and is connected to definition of optimum or necessary results of researches. It is known, that to one, more advanced, a direction of a technique of a condensation of discretely submitted curves (DSC) is the condensation on the basis of identities.

The method of condensation DSC on the basis of identities is used in many cases of the decision of the tasks connected to application of a technique of a condensation of experimentally received dot numbers{lines} as results of researches, and, in our opinion, is the most advanced method of interpolation. However, application of an offered method, does not allow to take into account all aspects, to the full. Proceeding from this, there is a necessity to consider other opportunities of a method of a condensation on the basis of identities.

Proceeding from this there is a necessity of an establishment of connection a difference of the circuit received on the basis of identities of a condensation, with the formula of a condensation on the basis of a basic 3-polynom and revealing of properties of this onnection.

In the given work influence of the formula of a condensation is considered on the basis of a basic 3-polynom on разностную the circuit received on the basis of identities of a condensation. That property of this influence is used in algorithm of a method of a condensation on the basis of identities in view of correction in the field of the decision emphasizes. Also, in work, it is marked, that suggested difference scheme the circuit enables correction of the decision and reception not oscillation unequivocal lines of an any configuration.

Due to this it is possible to generate more flexible algorithm of a method of condensation DSC on the basis of identities.

Key words: 2-polynom, a basic 3-polynom, identity of a condensation, difference the circuit.