DOI: 10.31388/2220-8674-2022-1-22
УДК 004.942

Є. А. Гавриленко, д.т.н., проф. ORCID: 0000-0003-4501-445X
Ю. В. Холодняк, к.т.н., доц. ORCID: 0000-0001-8966-9269
М. Ю. Мірошниченко, к.т.н. ORCID: 0000-0003-4596-3110
Таврійський державний агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного
e-mail: yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua, тел.: (097) 618-90-03

АЛГОРИТМ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ОБВОДІВ ЗА ЗАДАНИМИ УМОВАМИ

Анотація. В роботі розглядається розробка способів формування плоского та просторового гладкого обводу з регулярною зміною значень кривини та скруту Основна вимога до поверхонь виробів, які взаємодіють із середовищем, - забезпечення заданого характеру їх обтікання. Функціональні якості поверхні забезпечуються її геометричними характеристиками. Ламінарний характер обтікання поверхонь можна забезпечити за рахунок монотонної зміни значень кривини, скруту, радіусів стичних сфер уздовж ліній, що входять у визначник поверхні. Вихідними даними для формування лінійних елементів каркасу поверхні є вихідний точковий ряд і геометричні властивості кривої. Розроблено методи формування плоских і просторових кривих із закономірною зміною характеристик на основі довільного точкового ряду. На кожній ділянці, яка обмежена послідовними точками, визначається область, всередині якої розташовані всі криві лінії, що відповідають умовам задачі. Отримана крива, яка представлена новим точковим рядом вважається сформованою, якщо область її можливого розташування не перевищує заданої величини.

Ключові слова: обвід, диференціально-геометричні характеристики, радіус кривини, значення скруту, хід кривої, монотонність зміни характеристик.

Постановка проблеми. На етапі розвитку машинобудування актуальною є задача моделювання поверхонь на основі масиву точок. Координати точок можуть бути отримані в результаті вимірів на реальних фізичних зразках або розраховані, виходячи з умов роботи виробу. Процес моделювання поверхні включає наступні етапи:

- на основі вихідного точкового масиву формується дискретний лінійчатий каркас поверхні, лінійні елементи якого представлені точковим рядом;

- формуються безперервні обводи, які інтерполюють отримані точкові ряди;
- в системі автоматизованого проектування на основі сформованого лінійчатого каркасу створюється модель поверхні виробу;
- отримана комп'ютерна модель використовується в якості вихідних даних для створення управляючої програми з обробки виробу на верстаті з числовим програмним управлінням (ЧПУ).

Основна вимога до поверхонь виробів, що взаємодіють із середовищем, – забезпечення заданого характеру їх обтікання середовищем [1-3]. С геометричної точки зору функціональні якості поверхні забезпечуються її геометричними характеристиками. Ламінарний характер обтікання поверхонь можна забезпечити за рахунок монотонної зміни значень кривини, скруту, радіусів стичних сфер уздовж ліній, які складають визначник поверхні.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. При формуванні каркасу поверхні виникає задача інтерполяції точкових рядів. Задача інтерполяції може бути розв'язана методами безперервного та дискретного геометричного моделювання.

Існуючі методи [4-7] безперервної інтерполяції (метод шматково-гладких наближень, кривих Безьє, B-сплайн) не забезпечують заданий характер зміни диференціально-геометричних характеристик уздовж кривої.

Методи формування кривих ліній із закономірною зміною характеристик запропоновані у роботах [8-11]. Вихідними даними для формування кривої є точковий ряд та її геометричні властивості. Таку криву називатимемо дискретно представленою кривою (ДПК).

Вихідний точковий ряд розбивається на ділянки, які можна інтерполювати ДПК постійного ходу, вздовж якої радіуси кривизни і сфер, що стикаються, монотонно змінюються. Такі ділянки кривих називатимемо монотонними.

Для оцінки значень диференціально-геометричних характеристик у вузлах ДПК використовуються критерії, запропоновані у роботі [8]. Вимоги до призначення конкретних значень характеристик у вихідних точках, при яких задача має розв'язок, визначені в роботі [9]. Умовами моделювання кривої є монотонна зміна значень кривини, скруту, радіусів стичних сфер вздовж ДПК.

Формулювання мети статті. Метою дослідження є розробка способів формування плоского та просторового гладкого обводу з регулярною зміною значень кривини та скруту.

Основна частина. Метод, що розробляється, передбачає формування одновимірних обводів на основі області їх можливого розташування. Ця область визначається виходячи з заданих геометричних властивостей обводу.

Обвід формується у вигляді дискретно представленої кривої (ДПК), яка представлена впорядкованим рядом точок. Плоска ДПК формується у вигляді точкового ряду, що складається з скільки завгодно великої кількості точок. Це вихідні точки і точки згущення, положення яких визначаються виходячи з умов, що накладаються на криву, що формується.

Перед згущенням проводиться аналіз вихідного точкового ряду, в результаті якого визначаються ділянки, на основі яких може бути сформована крива з монотонною зміною кривини. Отримані ділянки формуються окремо та стикуються між собою. Положення точок згущення визначаються з координат вихідних точок і вимог, які накладаються на обвід. Такими умовами є відсутність осциляції, регулярність положень дотичних і значень кривини, монотонна зміна радіусів кривини вздовж кривої.

Радіуси кривизни в точках ДПК оцінюються за допомогою радіусів кривини кривої Безьє ($\overrightarrow{R_i}, \overleftarrow{R_i}$) для якої контрольні точки, що її задають, збігаються з вершинами базисного трикутника (БТ). БТ обмежений дотичними до ДПК, які проходять через послідовні точки та хордою, яка з'єднує ці точки (рис. 1).

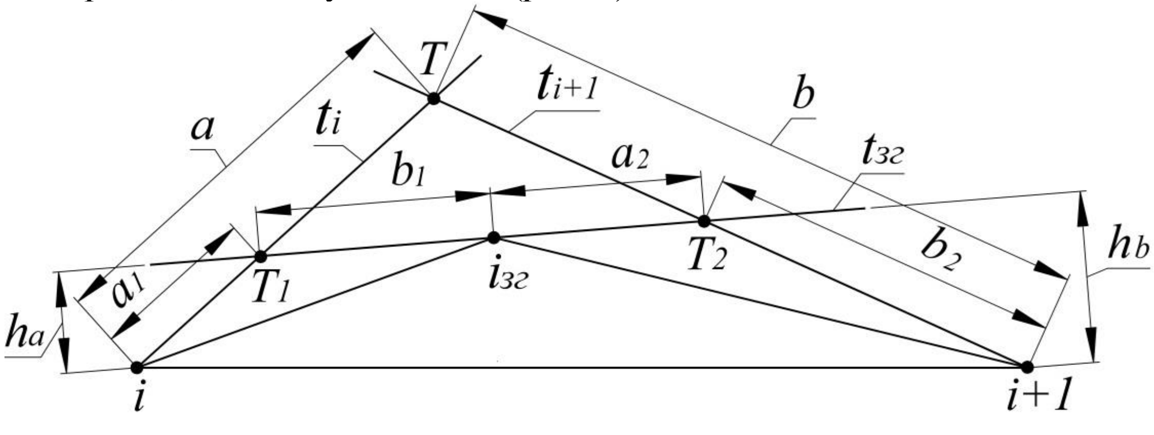

Рисунок 1. Формування БТ згущення

Значення радіусів кривини в точках i та $i+1$ оцінюються за формулами:

$$\overrightarrow{R_i} = \frac{a^3}{S}, \qquad \overleftarrow{R_{i+1}} = \frac{b^3}{S}, \tag{1}$$

де $a=|\,i;\,T\,|$ та $b=|T;i+1|$ - довжини сторін БТ ($i;T;i+1$); S – площа БТ.

На кожному кроці згущення всередині вихідного БТ призначається положення точки згущення ($i_{зг}$) та дотичної до обводу в цій точці ($t_{зг}$). В результаті отримуємо два БТ згущення ($i;T_1;i_{зг}$) та ($i_{зг};T_2;i+1$).

Схема згущення точкового ряду дозволяє забезпечити призначені значення радіусів кривини у точках ДПК. Для цього точки згущення всередині БТ призначаються таким чином, щоб значення радіусів кривини $\overrightarrow{R}_i^{зг}$ та $\overleftarrow{R}_i^{зг}$ у точках i та $i+1$, які визначають БТ згущення, були рівними значенням R_i та R_{i+1}, призначеним у цих точках, тобто $\overrightarrow{R}_i^{зг} = R_i$ та $\overleftarrow{R}_i^{зг} = i+1$.

Для того, щоб забезпечити регулярність зміни значень кривини необхідно контролювати, щоб значення $\overrightarrow{R}_i^{зг}$ та $\overleftarrow{R}_i^{зг}$, які у загальній точці визначають БТ($i;T_1;i_{зг}$) і БТ($i_{зг};T_2;i+1$), були рівними. Враховуючи параметри БТ, ця умова має вигляд

$$\frac{b_1^2}{a_2^2} = \frac{h_a}{h_b}, \tag{2}$$

де $a_1=|i;T_1|$ та $b_2=|T_2;i+1|$ – довжини сторін БТ($i;T_1;i_{зг}$) та БТ($i_{зг};T_2;i+1$) відповідно; h_a та h_b – відстані від точок i та $i+1$ до дотичної $t_{зг}$.

Призначення положень дотичних у вихідних точках відповідно до умови (2) дозволяє після кожного кроку згущення формувати обвід як складову криву з дуг кривих Безьє, які стикуються із забезпеченням спільного стичного кола в точці стикування. При цьому кожна ділянка кривої Безьє, обмежена послідовними точками, може мати ділянку зростання та ділянку зменшення радіусів кривини.

Для того, щоб забезпечити монотонність зміни кривини вздовж ДПК, запроваджено додаткові умови. У вихідних точках положення дотичних призначаються так, щоб всередині кожного БТ можна було сформувати монотонну ДПК. У процесі згущення контролюється виконання умов $\overrightarrow{R}_i^{зг} < \overrightarrow{R}_{зг}$ та $\overleftarrow{R}_{зг} < \overleftarrow{R}_{i+1}^{зг}$, які через параметри БТ виражаються наступним чином

$$a_1 < b_1 \text{ та } a_2 < b_2. \tag{3}$$

В результаті на кожному кроці згущення значення радіусу кривини, яке визначається в точці параметрами БТ, більше значення радіусу кривини в попередній точці і менше, ніж у наступній. Таким чином, в результаті послідовних згущень отримаємо однопараметричну множину точок, в кожній точці якої існує єдине стичне коло. Радіуси дотичних кіл монотонно змінюються вздовж ДПК.

Формування просторової ДПК за допомогою методу, що розробляється, передбачає обов'язковий аналіз характеристик вихідного точкового ряду. Кожні три послідовні точки визначають площину (рис. 2). Ці площини називатимемо прилягаючими площинами (ПП).

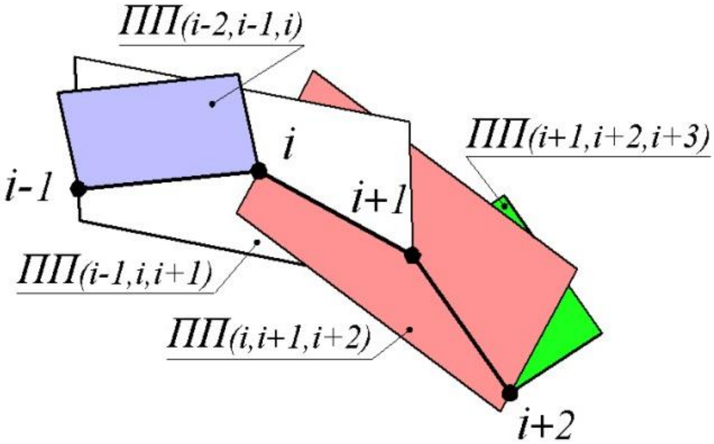

Рисунок 2. Схема розташування прилягаючих площин уздовж кривої

Необхідно, щоб кут між суміжними ПП (φ_i), всередині якого розташовується ділянка ДПК, не перевищував 180^0. В цьому випадку напрям повороту i-ої ПП щодо хорди $[i;i+1]$ на кут φ_i до суміщення з $i+1$-ою ПП збігається із напрямком ходу ДПК.

Чотири послідовні ПП, що проходять через i-ту та $i+1$-у точки обмежують тетраедр. Цей тетраедр є областю можливого розташування ДПК постійного ходу на ділянці (i, $i+1$). Ланцюг тетраедрів, визначених на всіх ділянках, є областю розташування гладкої кривої лінії постійного ходу, що інтерполює вихідний точковий ряд.

Дотична до ДПК (t_i) розташовується всередині двох суміжних двогранних кутів: φ_i та φ_{i+1}. Положення дотичної t_i визначається площинами, що є дотичними до ДПК у точці i та такими, що проходять через попередню (i-1) та наступну ($i+1$) вихідні точки.

Положення дотичних площин призначається зі значень дискретного скруту на ділянках ДПК, які визначаються характеристиками вихідного точкового ряду. У першому наближенні скрут на ділянці $i\ldots i+1$ оцінюватимемо величиною $B_i^{\varphi} = \dfrac{3\varphi_i}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}}$,

де φ_i – кут між суміжними прилеглими площинами; $h_i=|i;i+1|$ – довжина хорди СЛЛ.

Після призначення дотичних площин дискретний скрут на i-й ділянці ДПК визначається за формулою $B_i^{\psi} = \dfrac{3\psi_i}{h_i}$. Положення дотичних площин КП(t_i,$i+1$) та КП(i,t_{i+1}) (рис. 3) призначаються виходячи з умови $B_i^{\varphi} = B_i^{\psi}$.

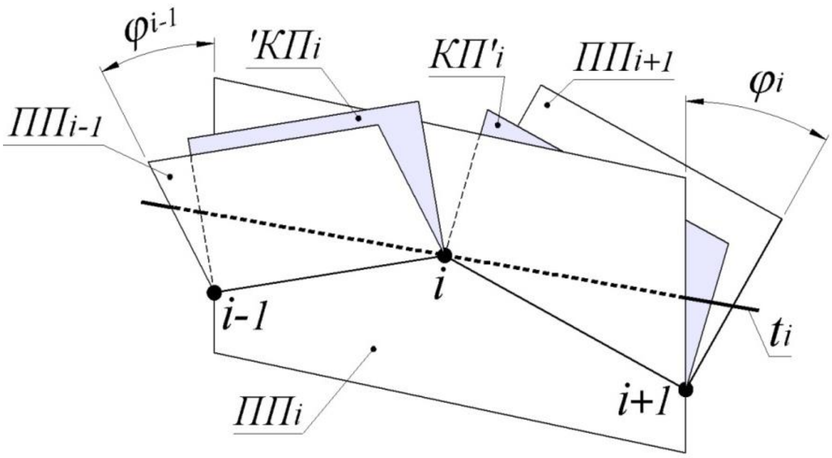

Рисунок 3. Визначення положення дотичних прямих та площин

Площини КП(i-1,t_i) та КП(t_i,i+1), що дотичні до ДПК в одній точці, обмежують діапазон w^i (рис. 4) можливого розташування стичної площини ($СП_i$). Положення $СП_i$ призначається таким чином, щоб вона розділяла двогранний кут wi на кути \`$w_i$ та $w_i$\` у співвідношенні $\frac{'w_i}{w_i'} = \frac{\psi_{i-1}}{\psi_i}$.

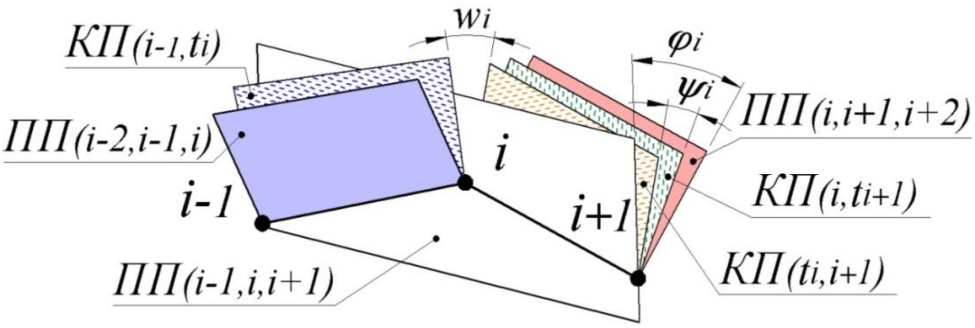

Рисунок 4. Діапазон розташування площини, що дотикається.

Після призначення дотичних площин отримуємо ще один критерій оцінки скруту на ділянках ДПК $B_i^w = \frac{3w_i}{h_{i-1} + h_i}$.

При формуванні ДПК, вздовж якої значення кручення монотонно зростають, положення дотичних площин має забезпечувати виконання умов:

$$\ldots < B_{i-1}^{\psi} < B_{i-1}^{w} < B_i^{\psi} < B_{i+1}^{w} < \ldots \tag{4}$$

Призначення дотичних та стичних площин уточнює тетраедр розташування ДПК. В результаті отримуємо новий ланцюг тетраедрів, грані яких належать дотичним кривим та дотичним площинам. Цей ланцюг тетраедрів – область можливого розташування гладкої ДПК постійного ходу, у вузлах якої призначено положення основних тригранників.

Точка згущення призначається всередині тетраедра розташування ДПК. Вихідний діапазон розташування точки $i_{зг}$ на ділянці $i...i+1$ - відрізок $[T_i;T_{i+1}]$, що належить прямій перетину дотичних площин КП($t_i,i_{зг}$) та КП($i_{зг},t_{i+1}$) (рис. 5).

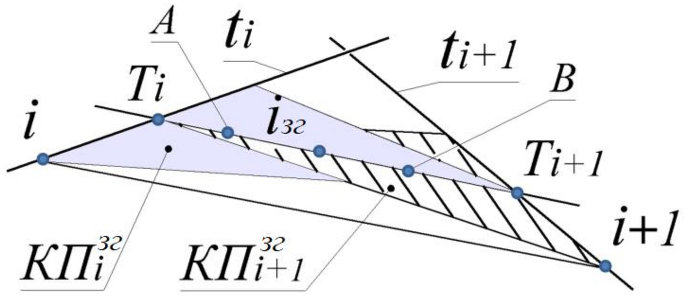

Рисунок 5. Визначення діапазону розташування точки згущення

Призначення $i_{зг}$ в межах відрізка $[T_i;T_{i+1}]$ забезпечує призначену динаміку зміни значень дискретного скруту вздовж ДПК, що отримується в результаті згущення. Конкретне положення $i_{зг}$ визначається з умови монотонної зміни значень радіусів кривини вздовж ДПК.

Ділянки, вздовж яких радіуси кривини змінюються монотонно, визначаються виходячи з характеристик вихідного точкового ряду. Наприклад, для формування ДПК, уздовж якої радіуси кривини монотонно зростають, має виконуватися умова

$$\ldots<R(i-1,i,i+1)< R(i,i+1,i+2)<\ldots \quad (5)$$

де $R(i-1,i,i+1)$ – радіус чтисного кола, що проходить через точки $i-1$, i, $i+1$.

Положення точки згущення на ділянці ДПК з монотонним зростанням радіусів кривини призначається з умови

$$R(i-1,i,i_{зг})<R(i,i_{зг},i+1)< R(i_{зг},i+1,i+2). \quad (6)$$

Точки згущення послідовно призначаються всередині максимального за розмірами тетраедра розташування ДПК. Виконання умов (4) та (6) при призначенні кожної точки згущення забезпечує формування точкового ряду, що належить ДПК з регулярною монотонною зміною значень кривини та скруту.

ДПК вважаємо сформованою, якщо область її можливого розташування: базисний трикутник для плоскої та тетраедр розташування для просторової кривої не перевищують задану точність формування обводу. Після цього обвід може бути представлений ламаною лінією, коробовою лінією кіл або В-сплайном, які інтерполюють отриманий точковий ряд.

Висновки. В результаті досліджень отримано такі результати.

1. Розроблено спосіб формування плоских обводів, які із заданою

точністю представляють криві лінії із заданими геометричними характеристиками: регулярна зміна вздовж кривої значень кривини при мінімальній за умовами задачі кількості особливих точок: точок перегину, точок зміни напряму зростання уздовж кривої значень кривини. Сформовані плоскі обводи утворюють сімейство кривих ліній, що є положенням утворюючої лінії, яка описує при своєму русі поверхню.

2. Розроблено спосіб формування просторових одновимірних обводів, які із заданою точністю представляють криві лінії із заданими геометричними властивостями: регулярна зміна вздовж кривої значень кривини та скруту при мінімальній за умовами задачі кількості особливих точок: точок зміни ходу, точок зміни напряму зростання уздовж кривої значень кривини. Сформовані просторові обводи утворюють сімейство кривих, що є напрямними лініями, які визначають закон переміщення твірної.

Список використаних джерел

1. Jadhav Y. P., Chougule V. N., Mulay A. V. Free-form surface models generation using reverse engineering techniques – an investigation. *IOSR Journal of Mechanical & Civil Engineering*. 2016. P. 379–385. DOI: 10.9790/1684-15008030311-15.

2. Fooladi M., Foroud A. A. Recognition and assessment of different factors which affect flicker in wind turbine. *IET Renewable Power Generation.* 2016. Vol. 10, no. 2. P. 250–259. DOI: 10.1049/iet-rpg.2014.0419

3. Farhad Hosseini S., Moetakef-Imani B. Innovative approach to computer-aided design of horizontal axis wind turbine blades. Journal of Computational Design and Engineering. 2017. Vol.4, Iss. 2. P. 98–105. DOI: 10.1016/j.jcde.2016.11.001

4. Li H. Geometric error control in the parabola-blending linear interpolator. *Journal of Systems Science and Complexity*. 2013. Vol. 26, Iss. 5. P. 777–798.

5. Pérez-Arribas F., Pérez-Fernández R. A B-spline design model for propeller blades. *Advances in Engineering Software*. 2018. Vol. 118. P. 35–44. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2018.01.005

6. Samreen Sh., Sarfraz M., Hussain M.-Z. A quadratic trigonometric spline for curve modeling. *Plos One*. 2019. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0208015

7. Kvasov B. Monotone and convex interpolation by weighted cubic splines. *Advances in Computational Mathematics*. 2014. Vol. 40. P. 91–116. DOI: 10.1007/s10444-013-9300-9

8. Havrylenko Ye., Kholodniak Yu., Halko S., Vershkov O., Miroshnyk O., Suprun O., Dereza O., Shchur T., Śrutek M. (2021) Representation of a Monotone Curve by a Contour with Regular Change in

Curvature. *Entropy (Basel).* Vol. 23 (7):923. DOI: 10.3390/e23070923

9. Havrylenko Y., Kholodniak Y., Vershkov O., Naidysh A. Development of the method for the formation of one-dimensional contours by the assigned interpolation accuracy. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. Vol. 1. Iss. 4(91). P. 76–82. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.123921

10. Kholodniak Yu., Havrylenko Ye., Pykhtieieva I., Shcherbyna V. Design of Functional Surfaces in CAD System of SolidWorks via Specialized Software. Modern Development Paths of Agricultural Production. Cham. 2019. P. 63–74. DOI: 10.1007/978-3-030-14918-5_7

11. Холодняк Ю. В., Гавриленко Е. А., Ивженко А. В., Найдыш А. В. Моделирование участка пространственной монотонной кривой линии. *Сучасні проблеми моделювання*: наукове фахове видання. Мелітополь: МДПУ, 2020. Вип.17. С. 131–137.

Стаття надійшла до редакції 22.04.2022 р.

Ye. Havrylenko, Yu. Kholodnyak, **M. Miroshnychenko**
Dmytro Motornyi Tavria State Agrotechnological University

ALGORITHM FOR MODELING ONE-DIMENSIONAL CONTOURS ACCORDING TO THE GIVEN DATA

Summary

The formation of one-dimensional contours on the basis on the given conditions is one of the most popular geometric modeling problems. The problem is solved by variative discrete geometric modeling, which assumes the formation of intermediate points for the initial set of condensation points. The discrete model of the curve consists of a point sets, given geometric characteristics and a condensation algorithm. A discretely presented curve (DPC) is formed by a condensation of the initial point set of an arbitrary configuration in areas on which it is possible to ensure a monotonic change in the values of its characteristics. Monotone plots are joined at special points. Every three consecutive points of the duodenum define an adjacent plane. Four adjacent planes passing through two consecutive points limit the tetrahedron. The chain of consecutive tetrahedrons defined on all segments is the region of the location of the smooth curve of the constant stroke line interpolating the initial point sets. The torsion on the sections of the DPC is estimated by the value of the ratio of the angle between adjacent adjacent planes to the length of the corresponding chord of the accompanying broken line. The point of thickening is assigned inside the tetrahedron of the DPC. As a result of successive condensations, we obtain a continuous bypass of a constant stroke, at each point of which there is a single position of the main trihedron. The point of condensation is assigned in such a way that the values of the torsion in the duodenum points change monotonically. This ensures that the torsion values are regular at the points of the bypass. The imposition of additional conditions on the DPC formed requires the definition of the corresponding region of a possible solution within the DPC arrangement tetrahedron.

***Key words*: contour, differential geometric characteristics, radius of curvature, twist value, course of the curve, monotony of changes in characteristics