



УДК 004.942

Ю. В. Холодняк, к.т.н.,

ORCID: 0000-0001-8966-9269

Є. А. Гавриленко, д.т.н.,

ORCID: 0000-0003-4501-445X

О. Г. Зінов'єва

ORCID: 0000-0003-3760-8952

*Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного*

e-mail: yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua, тел.: 097-618-90-03

### РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ З ЗАДАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

*Анотація.* Розроблено спосіб, який дозволяє забезпечити неперервний графік швидкості зміни радіусів кривини уздовж обводу. Обвід формується у вигляді кривої, представленої впорядкованою послідовністю точок (дискретно представлена крива). Швидкість зміни радіусів кривини дискретно представленої кривої оцінюється швидкістю зміни радіусів кривини уздовж кривої Безьє, яка визначається відповідним базисним трикутником. Проведено дослідження властивостей кривої Безьє, в результаті яких доведено, що всередині ділянки, вздовж якої значення радіусів кривини змінюються монотонно, значення критерію оцінки швидкості зміни радіусів кривини також змінюються монотонно. Запропоновано критерій оцінки величини розриву швидкості зміни радіусів кривини дискретно представленої кривої. Зменшення розривів значень критерію проводиться в процесі згущень всередині відповідного базисного трикутника, а також всередині попереднього та наступного трикутників. В процесі послідовних згущень максимальна величина розриву значень швидкості зміни радіусів кривини послідовно зменшується.

*Ключові слова:* алгоритм, каркас поверхні, обвід, диференціально-геометричні характеристики, кривина

*Постановка проблеми.* Конструювання виробів, функціональним призначенням яких є взаємодія із середовищем (робочі органи сільськогосподарських машин, канали двигунів внутрішнього згоряння, лопатки турбін та ін.), вимагає розробки методів моделювання поверхонь за заданими умовами. Такими умовами є проходження через заданий масив точок або ліній, регламентований характер зміни характеристик уздовж поверхні (положень дотичних,



радіусів кривини та ін.) [1-3].

Комп'ютерна модель поверхні може бути сформована на основі каркасу, елементами якого є плоскі криві лінії. З геометричної точки зору властивості поверхні забезпечуються властивостями кривих, що входять до її визначника [4]. Завдання забезпечення заданих функціональних властивостей таких поверхонь вимагає розробки методів формування лінійних елементів моделі як одномірних обводів із заданими диференціально-геометричними характеристиками. Для просторових ліній цими характеристиками є порядок фіксації та порядок гладкості обводу, динаміка зміни значень кривини та скруту вздовж кривої [5-7].

*Аналіз останніх досліджень.* Серед методів безперервного геометричного моделювання широке застосування отримало формування складних геометричних образів на основі сплайнів [8-12]. В-сплайн визначається контрольними точками, кожній з яких відповідає функція сполучення. Дискретний характер вихідних даних забезпечує гнучкість керування формою кривої. Порядок гладкості обводу забезпечується ступенем функцій сполучення. При збільшенні порядку гладкості знижується можливість локальної корекції кривої. Одночасно зростає можливість виникнення осциляцій. Ці особливості обмежують можливості забезпечення заданих характеристик обводів, що формуються на основі В-сплайнів.

Дискретне геометричне моделювання передбачає представлення поверхні точковим масивом, а лінійних елементів моделі – точковим рядом. Криву лінію, представлену впорядкованою послідовністю точок, будемо називати дискретно представленою кривою або ДПК. Крім вихідного точкового ряду до визначника ДПК входять її диференціально-геометричні характеристики. Ці характеристики забезпечуються в процесі моделювання. ДПК формується методом дискретної інтерполяції (згущення), що передбачає визначення положення проміжних точок для вихідного точкового ряду. При цьому вважаємо, що вихідні точки задані без похибки та в процесі моделювання не змінюють свого положення. Дискретне представлення означає, що сама крива та її показники не визначені однозначно на усіх етапах моделювання.

У роботах [13-15] розроблено алгоритм моделювання обводів із монотонною зміною радіусів кривини. Вихідними даними є впорядкований точковий ряд, який представляє ДПК та умови, що накладаються на обвід: відсутність осциляції, другий порядок гладкості, монотонна зміна радіусів кривини вздовж обводу. Обвід формується всередині базисних трикутників (БТ), обмежених дотичними, що проходять через точки ДПК, та відрізками, що з'єднують послідовні точки. Алгоритм передбачає формування



ланцюга з мінімальної кількості БТ, які забезпечують рівні значення радіусів кривини, і ці значення змінюються монотонно вздовж обводу.

Основне призначення ДПК, що формуються, – використання в якості лінійних елементів каркаса при моделюванні динамічних поверхонь, функціональним призначенням яких є взаємодія з середовищем. Забезпечення другого порядку гладкості та монотонної зміни радіусів кривини вздовж лінійних елементів каркасу поверхонь сприяє ламінарному характеру обтікання цих поверхонь середовищем [16]. Подальше покращення динамічних якостей поверхонь можна забезпечити за рахунок нарощування умов, що накладаються на лінійні елементи моделі: збільшення порядку гладкості обводу, забезпечення безперервного графіка швидкості зміни радіусів кривини вздовж обводу.

У роботі [17] запропоновано критерій оцінки швидкості зміни радіусів кривини в точках ДПК. Оцінка проводиться на основі ланцюга базисних трикутників, які визначають ДПК другого порядку гладкості з монотонною зміною радіусів кривини.

*Формулювання мети статті.* Метою даного дослідження є розробка методики уточнення області розташування точки згущення у разі, якщо на криву накладається додаткова умова – безперервність швидкості зміни радіусів кривини.

*Основна частина.* Під закономірною зміною кривини мається на увазі монотонне зростання або убування радіусів кривини на ділянках, на яких вихідні дані дозволяють це забезпечити.

ДПК формується згущенням вихідного точкового ряду. Перед згущенням проводиться аналіз вихідного точкового ряду, у результаті якого визначаються ділянки, на основі яких може бути сформована крива з монотонною зміною кривини. Отримані ділянки формуються окремо та стикуються з другим порядком гладкості. Положення точок згущення визначаються виходячи з координат вихідних точок та вимог, що накладаються на обвід. Цими умовами можуть бути відсутність осциляції, другий порядок гладкості, монотонна зміна радіусів кривини, неперервний графік швидкості зміни радіусів кривини уздовж кривої.

Радіуси кривини в точках ДПК оцінюються за допомогою радіусів кривини кривої Безье, для якої контрольні точки, що її задають, співпадають із вершинами БТ. БТ обмежений дотичними до ДПК, що проходять через послідовні точки та хордою, яка з'єднує ці точки.

Задача моделювання ділянки ДПК  $i \dots i + 1$  передбачає формування всередині вихідного БТ( $i, T, i + 1$ ) ланцюга БТ, який забезпечує виконання наступних умов:

- граничні БТ ланцюга визначають у вихідних точках задані



значення радіусів кривини  $R_i$  та  $R_{i+1}$ ;

- значення радіусів кривини в точках згущення, які визначаються суміжними БТ, дорівнюють один одному та монотонно змінюються уздовж ділянки ДПК;

- кожен БТ ланцюга визначає ділянку кривої Безьє, уздовж якої значення радіусів кривини змінюються монотонно.

На першому етапі формування проводиться аналіз вихідної ДПК, у результаті якого визначаються діапазони положень дотичних та значень радіусів кривини у вихідних точках, при яких поставлена задача має розв'язок.

Мінімальний ланцюг, який визначає ділянку обводу другого порядку гладкості, складається з чотирьох БТ. Ланцюг БТ визначає проміжний розв'язок – обвід із дуг кривих Безьє, які стикуються з другим порядком гладкості. Далі оцінюється динаміка зміни радіусів кривини уздовж кривих Безьє, які визначаються кожним БТ. У випадку, якщо крива Безьє має точку зміни зростання та убуття радіусів кривини, всередині відповідного БТ процес згущення повторюється.

Отриманий у результаті згущень мінімальний ланцюг БТ визначає проміжне рішення – обвід, що складається з дуг кривих Безьє з монотонною зміною кривини, з'єднаних з другим порядком гладкості.

Розглянемо задачу оцінки швидкості зміни радіусів кривини вздовж ДПК за допомогою швидкості зміни радіусів кривини вздовж проміжного рішення (кривої Безьє).

Швидкість зміни радіусів кривини кривої Безьє в точках, що обмежують ділянку  $M...N$ , можна оцінити за допомогою швидкості зміни радіусів кривини вздовж ділянки:

$$\sigma_M^B = \sigma_N^B = \frac{\Delta R_{M...N}}{s_{M...N}} = \frac{R_N - R_M}{s_{M...N}},$$

де  $R_M$  та  $R_N$  – радіуси кривини кривої Безьє в точках  $M$  і  $N$  відповідно;  
 $s_{M...N}$  – довжина ділянки  $M...N$  кривої Безьє.

Дослідження властивостей кривої Безьє показали, що всередині ділянки, вздовж якої значення радіусів кривини змінюються монотонно, значення критерію  $\sigma_M^B = \sigma_N^B$  також змінюються монотонно.

Точність, з якою значення  $\sigma_M^B = \sigma_N^B$  представляють швидкість зміни радіусів кривини в граничній точці, залежить від величини ділянки  $M...N$ : при зменшенні довжини ділянки значення критерію прагне до шуканого значення.



У таблиці 1 представлений результат дослідження ділянки кривої Безьє, контрольний багатокутник якої заданий точками  $P_0(-147;17)$ ,  $P_1(-136;20)$ ,  $P_2(-117;8)$ . Параметр  $0 \leq u \leq 1$  визначає положення точок  $M$  і  $N$  на кривій Безьє.

Таблиця 1

## Результати дослідження властивостей кривої Безьє

Значення параметра		Радіус кривини в точках кривої Безьє		Довжина ділянки $s$ , мм	Значення критерію $\sigma_M^B = \sigma_N^B$
$u_M$	$u_N$	$R_M$ , мм	$R_N$ , мм		
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>15.685</b>	<b>120.09</b>	<b>32.1431733</b>	<b>3.24812360</b>
$u_N - u_M = 0.2$					
0	0.2	15.6849529	21.1680000	4.77211627	1.14897599
0.2	0.4	21.1680000	32.3503855	5.40320545	2.06958362
<b>0.4</b>	<b>0.6</b>	<b>32.3503855</b>	<b>51.0853917</b>	<b>6.27040047</b>	<b>2.98784843</b>
0.6	0.8	51.0853917	79.5532175	7.29021207	3.90493795
0.8	1	79.5532175	120.089561	8.40723906	4.82159999
$u_N - u_M = 0.01$					
0	0.01	15.6849529	15.8461009	0.22842023	0.70548916
0.01	0.02	15.8461009	16.0183301	0.22922241	0.75136294
0.02	0.03	16.0183301	16.2017520	0.23007205	0.79723680
0.03	0.04	16.2017520	16.3964841	0.23096861	0.84311042
...					
0.48	0.49	38.8209045	39.7211530	.309639310	2.90741020
<b>0.49</b>	<b>0.50</b>	<b>39.7211530</b>	<b>40.6426217</b>	<b>.312015030</b>	<b>2.95328334</b>
<b>0.50</b>	<b>0.51</b>	<b>40.6426217</b>	<b>41.5855851</b>	<b>.314409561</b>	<b>2.99915618</b>
0.51	0.52	41.5855851	42.5503188	.316822488	3.04502905
0.52	0.53	42.5503188	43.5370998	.319253369	3.09090235
...					
0.97	0.98	113.145543	115.424534	0.44207746	5.15518428
0.98	0.99	115.424534	117.739105	0.44501940	5.20105662
0.99	1	117.739105	120.089561	0.44796775	5.24693031

У точках стикування ділянок кривих Безьє, що складають проміжний розв'язок задачі, відбувається розрив значень критерію  $\sigma_i$ . Сформуємо ланцюг БТ, який визначає обвід, що складається з дуг кривих Безьє, в точках стикування яких величина розриву значень  $\sigma_i$  не перевищує заданої величини. У цьому випадку вважатимемо, що отриманий ланцюг БТ представляє ДПК, уздовж якого значення  $\sigma_i$  змінюються безперервно.

Швидкість зміни радіусів кривини ДПК у точці  $i$  оцінюватимемо за допомогою критерію  $\sigma_i$  кривою Безьє, яка містить цю точку. Для цього кривою Безьє, яка визначається БТ( $i, T, i+1$ ), подовжуємо за його межі (рис. 1).

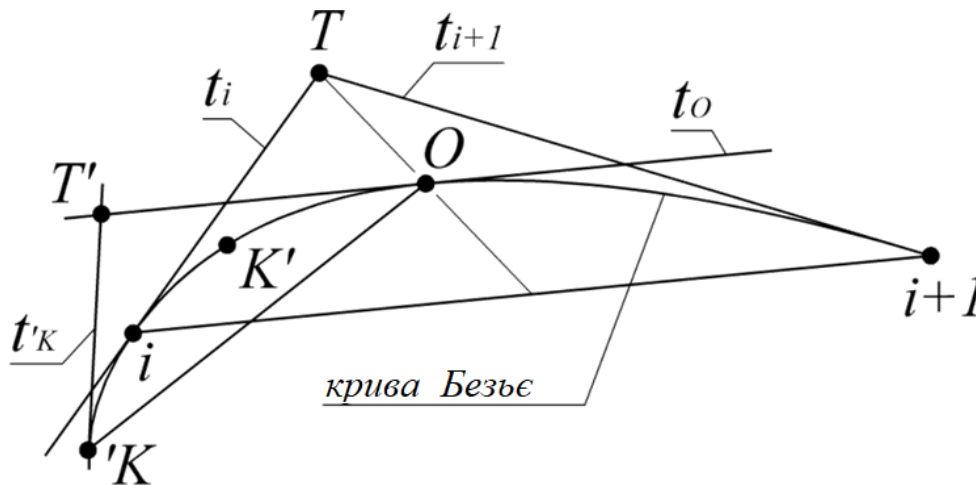


Рисунок 1. Визначення швидкості зміни радіусів кривини вздовж кривої Безьє

$$\sigma_i = \frac{1}{2} (' \sigma_i + \sigma_i '),$$

де  $' \sigma_i = \frac{R_i - R_{K'}}{s_i}$  та  $\sigma_i' = \frac{R_{K'} - R_i}{s_i'}$  – значення критерію швидкості зміни радіусів кривини кривої Безьє на ділянках  $'K \dots i$  та  $i \dots 'K$  відповідно;

$R_i$ ,  $R_{K'}$  та  $R_{K'}$  – радіуси кривини кривої Безьє в точках  $i$ ,  $'K$  та  $K'$ ,

$s_i$  та  $s_i'$  – довжини ділянок кривих Безьє  $'K \dots i$  та  $i \dots 'K$ .

Для того, щоб оцінити відхилення  $\sigma_i$  від шуканого значення, пропонується наступний спосіб:

- на кривій Безьє, що визначається БТ, призначається положення точок  $'K$  та  $K'$ ;

- оцінюється різниця між значеннями  $\sigma_i$ , які визначаються вихідною точкою  $i$  та кожною з точок  $'K$  та  $K'$

$$\Delta \sigma_i = | ' \sigma_i - \sigma_i ' | = \left| \frac{R_i - R_{K'}}{s_i} - \frac{R_{K'} - R_i}{s_i'} \right|. \quad (1)$$





Якщо значення  $\Delta\sigma_i$  не перевищує заданої величини  $\varepsilon$  ( $\Delta\sigma_i \leq \varepsilon$ ), то вважатимемо, що значення критерію  $\sigma_i$  визначає із заданою точністю значення швидкості зміни радіусів кривини в точці  $i$ .

Для спрощення розрахунків довжину кривої Безьє на ділянці, обмеженій двома точками, приймемо рівній довжині хорди, яка з'єднує ці точки. Положення точок  $K$  та  $K'$  призначимо таким чином, щоб довжини хорд  $[K; i]$  та  $[i; K']$  були рівними, тобто  $|K; i| = |i; K'| = l_i$ .

Відповідно до зазначених умов критерій (1) матиме вигляд

$$\sigma_i = \frac{l}{2l_i} (R_{K'} - R_K).$$

Значення  $R_{K'}$  та  $R_K$  визначаються за допомогою параметрів трикутника  $(K', T', O)$ , обмеженого дотичними до кривої Безьє в точках  $K'$  та  $O$  ( $t_{K'}$  та  $t_O$ ) і відрізком, що з'єднує ці точки.

Через параметри вказаного трикутника значення  $\sigma_i$  виражається формулою:

$$\sigma_i = \frac{l}{2l_i} \cdot \frac{(C^2 + D^2)^{\frac{3}{2}} \cdot |a \cdot B - c \cdot A| - 4(a^2 + c^2)^{\frac{3}{2}} \cdot |C \cdot B - D \cdot A|}{|(C \cdot B - A \cdot D) \cdot (a^2 \cdot B - c^2 \cdot A)|},$$

де  $A = 2x_{K'} - 4x_{T'} + 2x_O$ ,  $B = 2y_{K'} - 4y_{T'} + 2y_O$ ,  $a = x_{T'} - x_{K'}$ ,  $c = y_{T'} - y_{K'}$  – коефіцієнти, що залежать від параметрів трикутника  $(K', T', O)$ ;

$$C = -2(1-u)x_{K'} + 2(1-u)x_{T'} - 2ux_{T'} + 2ux_O,$$

$D = -2(1-u)y_{K'} + 2(1-u)y_{T'} - 2uy_{T'} + 2uy_O$  – коефіцієнти, що залежать від довжини хорди  $[K; i]$ .

Запропонований критерій може бути використаний для уточнення області розташування точки згущення при формуванні монотонної ДПК, уздовж якої значення критерію швидкості зміни радіусів кривини монотонно зростають або зменшуються.

Розглянемо ділянку ДПК  $i \dots i+1$ , у граничних точках якого БТ( $i, T, i+1$ ) визначає призначені значення радіусів кривини  $\vec{R}_i = R_i$ ,  $\overleftarrow{R}_{i+1} = R_{i+1}$  та значення швидкості зміни радіусів кривини  $\vec{\sigma}_i, \overleftarrow{\sigma}_{i+1}$ .

Уздовж кривої Безьє, що визначається БТ, значення  $\sigma_i$  змінюються безперервно. Величина розриву значень критерію швидкості зміни радіусів кривини ( $\Delta_i^R$ ) визначається за формулою:



$$\Delta_i^R = \overleftarrow{\sigma}_i - \overrightarrow{\sigma}_i,$$

де  $\overleftarrow{\sigma}_i$  та  $\overrightarrow{\sigma}_i$  – значення критерію швидкості зміни радіусів кривини у точці  $i$ , які визначаються попереднім та наступним БТ відповідно.

Завдання подальших досліджень полягає у розробці алгоритму, який забезпечує зменшення значень  $\Delta_i^R$  в раніше сформованих точках за рахунок виникнення розривів значень критерію  $\sigma_i$  в точках, які визначаються в процесі моделювання.

Внаслідок згущення на вихідній ділянці ДПК  $i...i+1$  отримуємо два БТ згущення, що визначають криві Безьє, які повинні відповідати умовам:

1) розрив значень  $\sigma_i$  в точках, що обмежують ділянку, зменшується щодо вихідних значень;

2) у точці згущення величина розриву швидкості зміни радіусів кривини не перевищує величини максимального розриву значень  $\sigma_i$  у вихідних точках.

Задачу забезпечення заданої динаміки зміни  $\sigma_i$  вздовж ДПК вважатимемо розв'язаною, якщо максимальне значення  $\Delta_i^R$  в точках ДПК не перевищує заданої точності  $\varepsilon$ .

Розглянемо способи керування значеннями  $\sigma_i$  в точках, що обмежують ділянку. Нехай вихідні положення  $t_{32}^l$  та  $i_{32}^l$  призначені виходячи з умов:

$$\begin{aligned} t_{32}^l & \text{ паралельна } [i; i+1]; \\ |i; T_1| & = |T_1; T|; \\ |T_1; i_{32}^l| & = |i_{32}^l; T_2|. \end{aligned}$$

БТ( $i, T_1, i_{32}^l$ ) та БТ( $i_{32}^l, T_2, i+1$ ) визначають криві Безьє, у яких точки зміни зростання-зменшення радіусів кривини збігаються (на рис. 2 це точка  $F$ , розташована поза БТ). У точці згущення зазначені БТ визначають рівні значення критерію швидкості зміни радіусів кривини, тобто  $\overleftarrow{\sigma}_{c2} = \overrightarrow{\sigma}_{c2}$ .



Коригування положень  $t_{32}^l$  та  $i_{32}^l$  проводиться всередині діапазонів, що забезпечують другий порядок гладкості та монотонність зміни радіусів кривини вздовж кривої.

Якщо  $t_{32}^{l'}$  переміщується у положення  $t_{32}^l$ , віддаляючись від заснування БТ  $[i; i+1]$ , то довжини сторін БТ згущення  $[i; T_1]$ ,  $[T_2; i+1]$  збільшуються, а  $[T_1; i_{32}^l]$ ,  $[i_{32}^l; T_2]$  зменшуються.

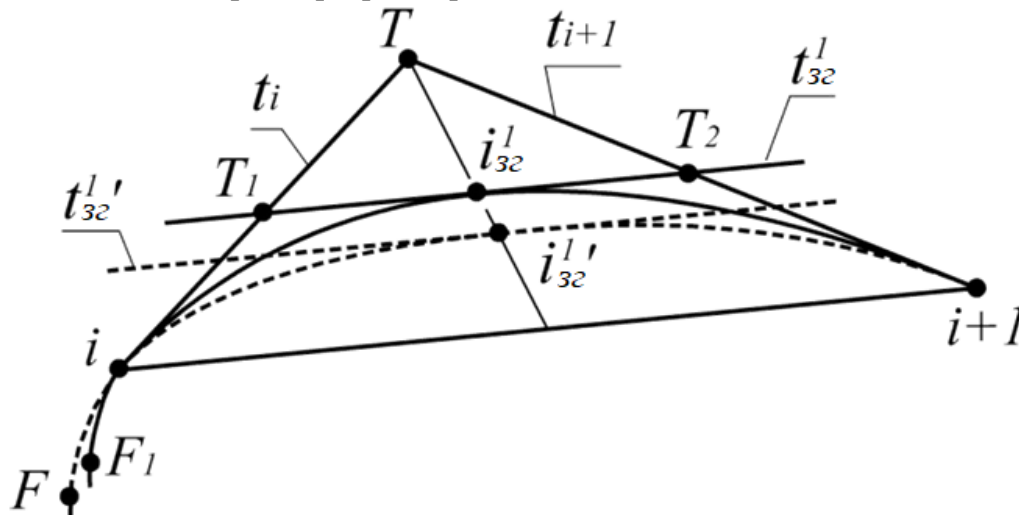


Рисунок 2. Коригування значень  $\sigma_i$  зміною положення  $t_{32}^l$

При цьому БТ( $i, T_1, i_{32}^l$ ) та БТ( $i_{32}^l, T_2, i+1$ ) визначають криві Безьє, у яких точки зміни зростання-зменшення радіусів кривини переміщуються щодо вихідного положення у напрямку до точки  $i$  ( $F_1$ ) і від точки  $i$  ( $F_2$ ) відповідно.

Значення  $\overset{\rightarrow}{R}_i^l$ , яке визначається параметрами БТ( $i, T_1, i_{32}^l$ ), збільшується, а значення  $\overset{\leftarrow}{R}_{32}^l$  – зменшується. Така зміна значень радіусів кривини в точках кривої призводить до зменшення приросту значень радіусів кривини на ділянці  $i \dots i_{32}^l$ . У цьому випадку значення  $\overset{\rightarrow}{\sigma}_i$  та  $\overset{\leftarrow}{\sigma}_{32}$ , що визначаються в граничних точках параметрами БТ( $i, T_1, i_{32}^l$ ), зменшуються.

При зазначеній зміні положення  $t_{32}^l$  значення радіусів кривини, що визначаються параметрами БТ( $i_{32}^l, T_2, i+1$ ), змінюються таким чином:

значення  $\overset{\rightarrow}{R}_{32}^l$  зменшується, а значення  $\overset{\leftarrow}{R}_{i+1}^l$  збільшується. Приріст значень радіусів кривини на ділянці  $i_{32}^l \dots i+1$  збільшується. Таким

чином, значення  $\vec{\sigma}_{32}$  і  $\overleftarrow{\sigma}_{i+1}$ , які визначаються параметрами БТ( $i_{32}^l, T_2, i+1$ ) збільшуються.

Розмірковуючи аналогічно, можна показати, що під час переміщення  $t_{32}^l$  в напрямку до хорди БТ  $[i, i+1]$  значення  $\vec{\sigma}_i$  та  $\overleftarrow{\sigma}_{32}$  збільшуються, а значення  $\vec{\sigma}_{32}$  та  $\overleftarrow{\sigma}_{i+1}$  – зменшуються.

Розглянемо механізм зміни значень  $\sigma_i$  при переміщенні  $i_{32}^l$  вздовж призначеної  $t_{32}^l$ .

Якщо точка згущення переміщується із положення  $i_{32}^{l'}$  в  $i_{32}^l$  (рис. 3), то довжини сторін БТ згущення  $[i; T_1]$ ,  $[T_2; i+1]$  залишаються незмінними, довжина  $[T_1; i_{32}^l]$  збільшується, а довжина  $[i_{32}^l; T_2]$  зменшується. Точки зміни зростання-зменшення радіусів кривини на кривих Безьє ( $F_1$  та  $F_2$ ), які визначаються БТ( $i, T_1, i_{32}^l$ ) та БТ( $i_{32}^l, T_2, i+1$ ), переміщуються у напрямку від точки  $i$  щодо вихідного положення  $F$ .

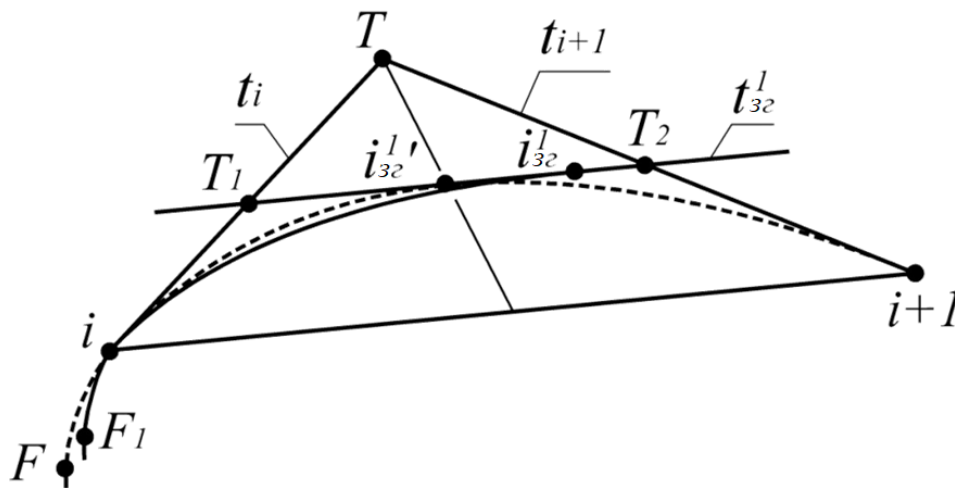


Рисунок 3. Коригування значень  $\sigma_i$  зміною положення  $i_{32}^l$

Значення  $\vec{R}_i^l$  та  $\overleftarrow{R}_{32}^l$ , що визначаються в точках  $i$  та  $i_{32}^l$  параметрами БТ( $i, T_1, i_{32}^l$ ), зменшується та збільшується відповідно. Приріст значень радіусів кривини на ділянці  $i \dots i_{32}^l$  збільшується. Таким чином, значення  $\vec{\sigma}_i$  та  $\overleftarrow{\sigma}_{32}$  збільшуються щодо вихідних значень.



При вказаному переміщенні  $i_{32}^l$  значення  $R_{32}^{\rightarrow l}$  та  $R_{i+1}^{\leftarrow l}$ , які визначаються параметрами БТ( $i_{32}^l, T_2, i+1$ ), зменшуються та збільшуються відповідно. Приріст значень радіусів кривини на ділянці  $i_{32}^l \dots i+1$  та значення  $\sigma_{32}^{\rightarrow}$ ,  $\sigma_{i+1}^{\leftarrow}$  збільшуються.

Аналогічно можна показати, що під час переміщення  $i_{32}^l$  уздовж дотичної в напрямку точки  $i$ , значення  $\sigma_i^{\rightarrow}$  та  $\sigma_{32}^{\leftarrow}$ ,  $\sigma_{32}^{\rightarrow}$  та  $\sigma_{i+1}^{\leftarrow}$  одночасно зменшуються.

Сформуємо мінімальний ланцюг БТ, який у точках  $i$  та  $i+1$  забезпечує:

- 1) призначені значення радіусів кривини –  $R_i$  та  $R_{i+1}$  відповідно;
- 2) зменшення розривів значень  $\sigma_i - \Delta_i^R$  та  $\Delta_{i+1}^R$ .

Зменшення значень  $\Delta_i^R$  та  $\Delta_{i+1}^R$  проводиться за рахунок коригування значень  $\sigma_i$  у точках  $i$  та  $i+1$ . Залежно від співвідношення значень  $\sigma_i^{\rightarrow}$ ,  $\sigma_{i+1}^{\leftarrow}$ , визначених БТ( $i, T, i+1$ ), та значень  $\sigma_i^{\leftarrow}$ ,  $\sigma_{i+1}^{\rightarrow}$ , визначених у цих точках попереднім та наступним БТ, можливі наступні варіанти коригування:

$$- \text{ якщо } \begin{cases} \sigma_i^{\rightarrow} < \sigma_i^{\leftarrow}; \\ \sigma_{i+1}^{\leftarrow} < \sigma_{i+1}^{\rightarrow}, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \sigma_i^{\rightarrow} > \sigma_i^{\leftarrow}; \\ \sigma_{i+1}^{\leftarrow} > \sigma_{i+1}^{\rightarrow}, \end{cases}, \text{ то значення } \sigma_i^{\rightarrow} \text{ та } \sigma_{i+1}^{\leftarrow}$$

необхідно одночасно збільшувати чи зменшувати;

$$- \text{ якщо } \begin{cases} \sigma_i^{\rightarrow} > \sigma_i^{\leftarrow}; \\ \sigma_{i+1}^{\leftarrow} < \sigma_{i+1}^{\rightarrow}, \end{cases}, \text{ то значення } \sigma_i^{\rightarrow} \text{ необхідно зменшити, а}$$

значення  $\sigma_{i+1}^{\leftarrow}$  – збільшити, або навпаки.

Зменшення розривів значень  $\sigma_i$  в точках  $i$  та  $i+1$  проводиться в процесі згущення всередині БТ( $i, T, i+1$ ), а також всередині попереднього та наступного БТ. При цьому всередині БТ( $i, T, i+1$ )

забезпечується наближення значень  $\sigma_i^{\rightarrow}$  та  $\sigma_{i+1}^{\leftarrow}$  до значень

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \left( \sigma_i^{\rightarrow} + \sigma_i^{\leftarrow} \right) \text{ та } \sigma_{i+1} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{i+1}^{\rightarrow} + \sigma_{i+1}^{\leftarrow} \right) \text{ відповідно.}$$

Значення  $\sigma_i$  в точках  $i$  та  $i+1$  змінюються за рахунок вибору положень точок згущення та дотичних, які їм відповідають. Попередне

положення  $t_{32}^1$  призначається по центру діапазону, визначеного виходячи з призначених значень  $R_i$  та  $R_{i+1}$  у вихідних точках та умови монотонної зміни радіусів кривини вздовж ділянок ДПК. Положення  $i_{32}^1$  при заданому положенні  $t_{32}^1$  призначається з урахуванням вимоги

$$\begin{cases} \rightarrow \\ R_i^2 = R_i; \\ \leftarrow \\ R_{i+1}^2 = R_{i+1}; \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ R_{32}^2 = R_{32}^2. \end{cases}$$

В результаті значення  $\Delta_i^R$  та  $\Delta_{i+1}^R$ , в точках, що обмежують ділянку, зменшуються, а в точці згущення виникає розрив значень  $\sigma_i - \Delta_{32}^R = \overset{\rightarrow}{\sigma}_{32} - \overset{\leftarrow}{\sigma}_{32}$ . Положення  $t_{32}^1$  та  $i_{32}^1$  призначаються таким чином, щоб величина  $\Delta_{32}^R$  не перевищувала максимального значення з  $\Delta_i^R$  та  $\Delta_{i+1}^R$ . При цьому параметри БТ згущення у точці  $i_{32}^1$  визначають значення  $\overset{\leftarrow}{R}_{32}^1 \neq \overset{\rightarrow}{R}_{32}^1$ , а в точках  $i$  та  $i+1$  – значення  $\overset{\rightarrow}{R}_i^1$  та  $\overset{\leftarrow}{R}_{i+1}^1$ , не рівні призначеним значенням  $R_i$  та  $R_{i+1}$ .

Коригування значень радіусів кривини в точках  $i$ ,  $i_{32}^1$ ,  $i+1$  виконується внаслідок проведення другого кроку згущення.

Положення  $t_{32}^2$  всередині відповідних БТ призначаються паралельно стороні БТ, а точки  $i_{32}^2$  та  $i_{32}^2$  – на медіані БТ (рис. 4).

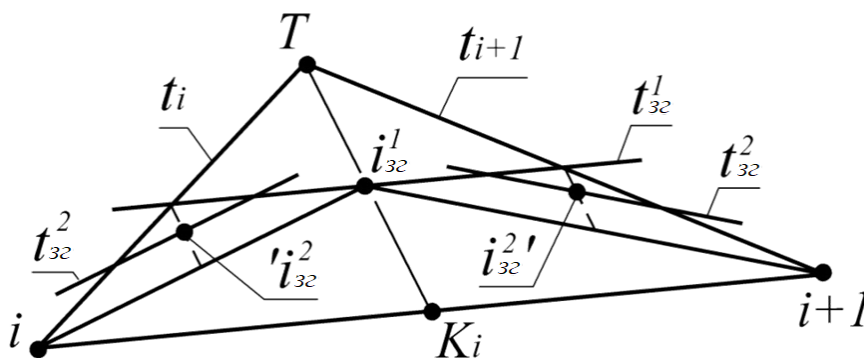


Рисунок 4. Призначення положень  $t_{32}^2$ ,  $i_{32}^2$  та  $i_{32}^2$

В результаті всередині БТ( $i, T, i+1$ ) отримуємо ланцюг з чотирьох БТ, що забезпечують другий порядок гладкості та монотонної зміни

радіусів кривини вздовж ДПК. При цьому величини  $\Delta_i^R$  та  $\Delta_{i+1}^R$  зменшуються за рахунок виникнення розривів значень  $\sigma_i$  в точках  $i_{32}^2$ ,  $i_{32}^1$ ,  $i_{32}^2$ .

Змінюючи положення  $t_{32}^1$  всередині діапазону можливих положень можна отримати нескінченну кількість проміжних розв'язків задачі. Оптимальним вважатимемо таке положення  $t_{32}^1$ , при якому максимальна величина розривів значень  $\sigma_i$  в точках  $i$ ,  $i_{32}^2$ ,  $i_{32}^1$ ,  $i_{32}^2$ ,  $i+1$  є мінімальною з можливих.

Для визначення оптимального положення  $t_{32}^1$  пропонується наступний спосіб:

- діапазон можливих положень  $t_{32}^1$ , яке забезпечує монотонну зміну радіусів кривини вздовж ділянки, (на рис. 5 це відрізок  $[A; B]$ ) розбивається на рівні ділянки. Розмір ділянки визначається відстанню  $\Delta h$  від його кордону до меж діапазону  $[A; B]$ ;
- для кожного положення  $t_{32}^1$ , що визначається проходженням через межу ділянки, обчислюється максимальне значення з величин розривів значень  $\sigma_i$  у точках  $i$ ,  $i_{32}^2$ ,  $i_{32}^1$ ,  $i_{32}^2$ ,  $i+1$  ( $\Delta_{\max}^R$ );

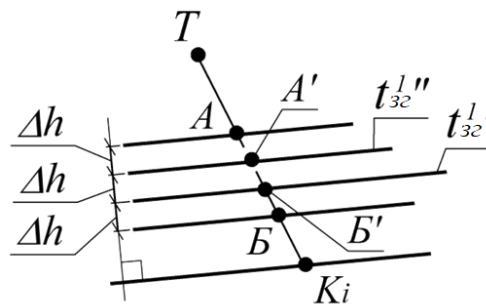


Рисунок 5. Призначення положення  $t_{32}^1$

- визначаються два сусідні положення щодо першого кроку згущення ( $t_{32}^1$  та  $t_{32}^2$ ), при яких значення  $\Delta_{\max}^R$  мінімальні. В результаті отримуємо відрізок  $[A'; B']$  – уточнений діапазон положень  $t_{32}^1$ , що забезпечують мінімальне значення  $\Delta_{\max}^R$ . Якщо різниця між отриманими значеннями  $\Delta_{\max}^R$  не перевищує заданої величини (наприклад, 10% від величини  $\Delta_{\max}^R$ ), то остаточне положення  $t_{32}^1$  призначається всередині діапазону, обмеженого  $t_{32}^1$  та  $t_{32}^2$ . В іншому випадку необхідно зменшити крок  $\Delta h$  та повторити описані дії.



В результаті згущення отримуємо новий ланцюг БТ, що визначає монотонну криву. Максимальна величина розриву значень  $\sigma_i$  у точках стикування ділянок на кожному кроці згущення послідовно зменшується. У разі коли максимальне значення  $\Delta_i^R$  не перевищує заданої величини  $\varepsilon$ , вважатимемо, що ДПК, вздовж якої швидкість зміни радіусів кривини змінюється безперервно, сформована.

*Висновки.* Запропоновано алгоритм формування обводу другого порядку гладкості з монотонною зміною радіусів кривини з урахуванням додаткової вимоги – безперервний графік швидкості зміни радіусів кривини вздовж обводу. Обвід формується методом згущень на основі точкового ряду. Алгоритм передбачає зменшення величини розриву значень швидкості зміни радіусів кривини в точках стикування ділянок обводу за рахунок виникнення розриву всередині ділянки - точках стикування базисних трикутників згущення.

Застосування розробленого способу моделювання обводу дозволяє підвищити якість формування функціональних поверхонь виробів при вирішенні завдань зворотного інжинірингу, а також при формуванні поверхонь виробів, що взаємодіють із середовищем (лопаток турбін, робочих органів сільськогосподарських машин, каналів двигунів внутрішнього згоряння та ін.).

#### Список використаних джерел

1. Hosseini S. F., Moetakef-Imani B. Innovative approach to computer-aided design of horizontal axis wind turbine blades. *Journal of Computational Design and Engineering*. 2017, Vol. 4, Iss. 2. P. 98–105. <https://doi.org/10.1016/j.jcde.2016.11.001>
2. Pérez-Arribas F., Trejo-Vargas I. Computer-aided design of horizontal axis turbine blades. *Renewable Energy*. 2012. Vol. 44. P. 252–260. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2012.01.100>
3. Fooladi M., Foroud A.A. Recognition and assessment of different factors which affect flicker in wind turbine. *IET Renewable Power Generation*. 2015. Vol. 1. P. 250–259. <https://doi.org/10.1049/iet-rpg.2014.0419>
4. Pérez-Arribas F., Pérez-Fernández R. A B-spline design model for propeller blades. *Advances in Engineering Software*. 2018. Vol. 118. P. 35–44. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2018.01.005>
5. Peng Y. H., Yin Z.W. The algorithms for trimmed surfaces construction and tool path generation in reverse engineering. *Computers & Industrial Engineering*. 2008. Vol. 54. Iss. 3. P. 624–633. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2007.09.012>
6. Qawaqzeh M., Szafraniec A., Halko S., Miroshnyk O., Zharkov A. Modelling of a household electricity supply system based on a wind power





plant. *Przeegląd Elektrotechniczny*. 2020. Vol. 96. doi: 10.15199/48.2020.11.08

7. Yinling Ke, Shuqian Fan, Weidong Zhu, An Li, Fengshan Liu, Xiquan Shi. Feature-based reverse modeling strategies. *Computer-Aided Design*. 2006. Vol. 38. Iss. 5. P. 485–506. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2005.12.002>

8. Park H., Kim K., Lee S-C. A method for approximate NURBS curve compatibility based on multiple curve refitting. *Computer-Aided Design*. 2000. Vol. 32. Iss. 4. P. 237–252. [https://doi.org/10.1016/S0010-4485\(99\)00088-3](https://doi.org/10.1016/S0010-4485(99)00088-3)

9. Hashemian A., Hosseini S. F. An integrated fitting and fairing approach for object reconstruction using smooth NURBS curves and surfaces. *Computers & Mathematics with Applications*. 2018. Vol. 76. Iss. 7. P. 1555–1575. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.07.007>

10. Weishi Li, Shuhong Xu, Jianmin Zheng, Gang Zhao. Target curvature driven fairing algorithm for planar cubic B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*. 2004. Vol. 21. Iss. 5. P. 499–513. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2004.03.004>

11. Farin G., Rein G., Sapidis N., Worsey A.J. Fairing cubic B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*. 1987. Vol. 4. Iss. 1–2. P. 91–103. [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(87\)90027-6](https://doi.org/10.1016/0167-8396(87)90027-6)

12. Peng Lan; Zuqing Yu; Liang Du; Nianli Lu. Integration of non-uniform Rational B-splines geometry and rational absolute nodal coordinates formulation finite element analysis. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2014. Vol. 27. Iss. 5. P. 486–495. [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(14\)60057-4](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(14)60057-4)

13. Havrylenko Y., Kholodniak Y., Vershkov O., Naidysh A. Development of the method for the formation of one-dimensional contours by the assigned interpolation accuracy. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Technol.* 2018. Vol. 4(91). Iss. 1. P. 76–82. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.123921>

14. Havrylenko Y., Kholodniak Y., Halko S., Vershkov O., Bondarenko L., Suprun O., Miroshnyk O., Shchur T., Śrutek M., Gackowska M. Interpolation with Specified Error of a Point Series Belonging to a Monotone Curve. *Entropy*. 2021. Vol. 23. No. 493. <https://doi.org/10.3390/e23050493>

15. Havrylenko Y., Kholodniak Y., Halko S., Vershkov O., Miroshnyk O., Suprun O., Dereza O., Shchur T., Śrutek M. Representation of a Monotone Curve by a Contour with Regular Change in Curvature. *Entropy*. 2021. Vol. 23. No. 923. <https://doi.org/10.3390/e23070923>

16. Hashemian A., Imani B.M. Surface fairness: a quality metric for aesthetic assessment of compliant automotive bodies. *Journal of Engineering Design*. 2018. Vol. 29. Iss. 1-2. P. 41–64. <https://doi.org/10.1080/09544828.2018.1435853>

17. Kholodniak Yu., Havrylenko Ye., Pykhtieieva I., Shcherbyna V. Design of Functional Surfaces in CAD System of SolidWorks via



Specialized Software. Modern Development Paths of Agricultural Production. Cham. 2019. P. 63–74. DOI: 10.1007/978-3-030-14918-5\_7

Стаття надійшла до редакції 09.03.2023 р.

**Y. Kholodniak, Y. Havrylenko, O. Zinovieva**  
**Dmytro Motorny Tavria State Agrotechnological University**

## **DEVELOPMENT OF THE MODELING ALGORITHM OF CURVES ACCORDING TO THE GIVEN PROPERTIES**

### *Summary*

The method that allows to provide a continuous graph of the rate of change of the radiuses of curvature along the contour, is developed in this article. The contour is formed as a curve represented by an ordered set of points (discretely represented curve). In addition to the initial point set, the determinant of the discretely presented curve includes its differential geometric characteristics. These characteristics are provided at the modeling process. The discretely represented curve is formed by the method of discrete interpolation (densification of points), which involves determining the position of intermediate points for the original point set.

The rate of change of the radiuses of curvature of a discretely represented curve is estimated by the rate of change of the radiuses of curvature along the Bezier curve, which is determined by the basic triangle. The accuracy with which the value of the specified criterion represents the rate of change of the radiuses of curvature of a discretely represented curve depends on the size of the section bounded by two consecutive points of the curve: as the length of the section decreases, the value of the criterion approaches the desired value. A study of the properties of the Bezier curve was conducted, as a result of which it was proved that within the section along which the values of the radiuses of curvature change monotonically, the values of the criterion for evaluating the rate of change of the radii of curvature also change monotonically. A criterion for estimating the magnitude of the discontinuity of the rate of change of the radiuses of curvature of a discretely represented curve is proposed. The reduction of gaps in the criterion values is carried out in the process of condensation within the corresponding base triangle, as well as within the previous and subsequent triangles. In the process of successive thickenings, the maximum value of the gap in the values of the rate of change of the radii of curvature is successively reduced. In the case when the maximum value of the discontinuity does not exceed the specified value, a discrete curve is formed, along which the rate of change of the radii of curvature varies continuously. The application of the developed contour modeling method allows to improve the quality of the formation of functional surfaces of products when solving reverse engineering tasks, as well as when forming the surfaces of products that interact with the environment (blades of turbines, working bodies of agricultural machines, channels of internal combustion engines, etc.).

**Key words:** algorithm, surface frame, outline, differential geometric characteristics, curvature