УДК 514.18 DOI: 10.31388/2220-8674-2018-2-45

КІНЕМАТИЧНИЙ ГВИНТ ТРИГРАННИКА ФРЕНЕ

Пилипака С. Ф., д.т.н.
Національний університет біоресурсів і природокористування України,
Тел.: (044) 527-82-26
Кресан Т. А., к.т.н.
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»,
Тел.: (0463`) 2-31-30
Кремець Я. С., к.т.н.
Національний університет біоресурсів і природокористування України,
Тел.: (044) 527-82-26

Анотація – При переміщенні твердого тіла в просторі його рух в кожен момент часу можна розкласти на обертальний навколо осі миттєвого обертання і поступальний в певному напрямі. Якщо за тверде тіло взяти супровідний тригранник Френе напрямної кривої, то характер його руху в просторі цілком залежатиме від диференціальних характеристик цієї кривої. Значення кутової швидкості обертання, положення миттєвої осі обертання, поступальної швидкості в напрямі орта дотичної залежатиме від її кривини і скруту.

В статті графічними і аналітичними методами знайдено положення миттєвої осі обертання, яка проходить через вершину тригранника, величину кутової швидкості його обертання. Два рухи – обертальний навколо осі миттєвого обертання і поступальний в напрямі орта дотичної – замінено одним гвинтовим рухом навколо миттєвої осі обертання і ковзання. Для цього застосовані формули Френе. Знайдено кінематичний гвинт, його положення і параметр для напрямних просторових кривих. Розглянуто частковий випадок для узагальнених кривих укосу, зокрема, для гвинтової лінії.

Ключові слова – **тригранник Френе, кінематичний гвинт, вектор Дарбу, напрямна крива, крива укосу, кривина, скрут.**

Постановка проблеми. Положення твердого тіла в просторі задається трьома його точками. При його просторовому русі в конкретний момент часу ці точки мають визначений напрям і величину швидкостей. Відніманням вектора швидкості однієї із точок від векторів швидкостей всіх трьох точок ми отримаємо одну точку нерухомою. Через неї проходить миттєва вісь обертання тіла. Це є розкладання просторового руху тіла на обертальний і поступальний рухи. Таких варіантів може бути багато. Однак існує тільки одна миттєва вісь обертання, в проекції на яку швидкості всіх інших точок мають рівні значення. Така вісь носить назву миттєвої осі обертання і ковзання, або кінематичного гвинта.

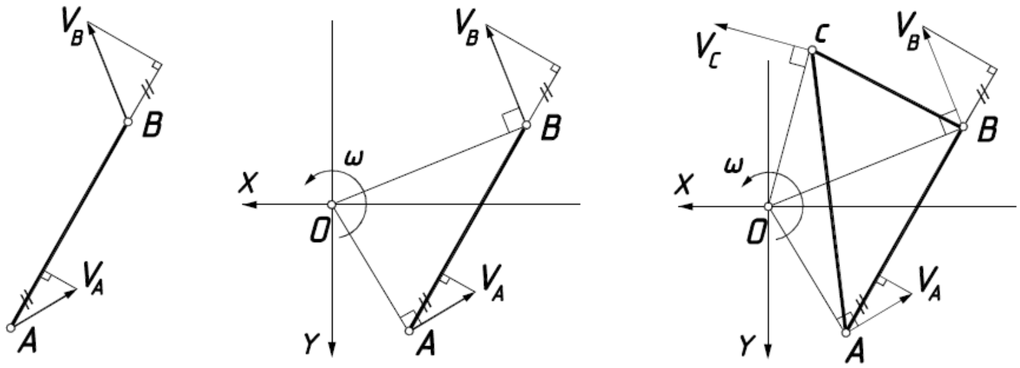
Рух супровідного тригранника Френе по напрямній кривій можна розглядати, як рух твердого тіла, закономірність якого визначено диференціальними характеристиками кривої. Очевидно, що і кінематичний гвинт тригранника буде залежати від цих характеристик кривої.

Аналіз попередніх досліджень. В праці [1] зазначається, що в багатьох питаннях механіки виявляється корисним розглядати рух твердого тіла по відношенню до системи координат, яка збігається із натуральним тригранником траєкторії однієї із точок тіла з використанням формул Френе. Так, в праці [2] наводиться приклад із застосуванням формул Френе при розгляді руху твердого тіла в системі натурального тригранника, за яке прийнято літак. В праці [3] в ролі твердого тіла розглянуто тригранник гвинтової лінії. Ми будемо розглядати тригранник Френе напрямної просторової кривої, заданої у функції довжини s власної дуги. В такому випадку можна застосувати формули Френе.

Формулювання цілей статті. Визначити характеристики кінематичного гвинта тригранника Френе напрямної просторової кривої.

Основна частина. Якщо одна із трьох точок твердого тіла віддалена в нескінченність, то тоді його рух можна вивчати за кінцями відрізка AB, вектори швидкостей V_A і V_B яких лежать в площині (рис. 1,а).

Величину і напрям швидкості однієї точки можна задати, а такі ж характеристики точки протилежного кінця відрізка повинні задовольняти умову рівності проекцій цих швидкостей на сам відрізок (на рис. 1,а рівні проекції позначено двома рисками). Це зумовлено тим, що для відрізка AB існує миттєва вісь обертання, яка проходить через нескінченно віддалену точку, тобто вона перпендикулярна площині розташування відрізка і векторів швидкостей його точок.

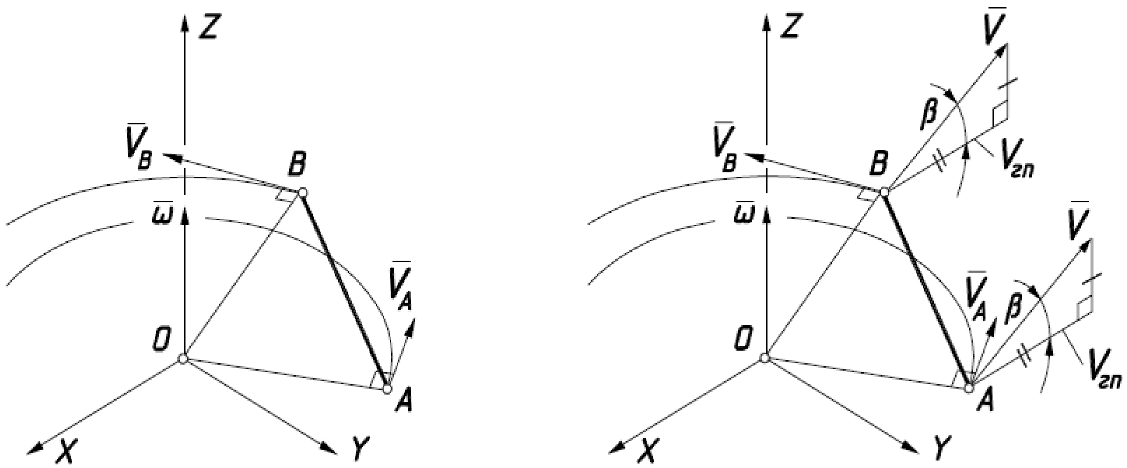


а б в

Рис. 1. До знаходження миттєвої осі обертання плоскої фігури:
а) зв'язок між швидкостями кінців відрізка, що рухається у площині;
б) визначення миттєвої осі обертання відрізка *AB*;
в) до знаходження швидкості будь-якої точки, жорстко прив’язаної до відрізка *AB*

На рис. 1,б миттєва вісь обертання проекціюється в точку *O* і знайдена на перетині перпендикулярів *OA* і *OB*, проведених із точок *A* і *B* до векторів швидкостей цих точок. Величина лінійної швидкості будь-якої точки відрізка *AB* визначається як добуток кутової швидкості ω його обертання навколо осі миттєвого обертання на відстань від осі до вектора швидкості. Отже, $V_A=OA\cdot\omega$, $V_B=OB\cdot\omega$. Спільна кутова швидкість обертання ω дозволяє знайти лінійну швидкість будь-якої точки відрізка *AB*, а також точки поза його межами, але жорстко зв’язаної із ним. Наприклад, для точки *C* (рис. 1,в) $V_C=OC\cdot\omega$. Проекції швидкостей V_B і V_C на відрізок *BC* будуть рівними. Якщо взяти точку поза межами площини трикутника *ABC*, але жорстко зв’язаної із ним, то таким же способом можна знайти вектор і величину швидкості і для неї. Вектори швидкостей всіх точок твердого тіла в даному випадку будуть перпендикулярними осі миттєвого обертання, тобто їх проекції на вісь будуть рівними нулю.

На рис. 1,б,в вісь миттєвого обертання проекціюється в точку, яку ми прийняли за початок координат. На рис. 2,а вектори швидкостей точок *A* і *B* зображені в аксонометрії і є дотичними до траєкторій обертального руху, а вектор кутової швидкості $\overline{\omega}$ збігається із віссю *OZ*. Надамо для всіх точок тіла лінійну швидкість *V*, вектор якої утворює із площиною розташування відрізка кут β (на рис. 2,б цей вектор показано для точок *A* і *B*). Вказаний вектор можна розкласти на дві складові: горизонтальну проекцію $V_{гп}$ (позначено двома рисками) і вертикальну складову (позначено однією рискою). Вектор швидкості *V* ми спрямували так, щоб його горизонтальні проекції були паралельними осі *OX*.



а б

Рис. 2. Додавання до точок тіла, яке здійснює обертальний рух, поступальної швидкості *V* в заданому напрямі:
а) точки тіла здійснюють обертальний рух;
б) вектор поступальної швидкості *V* розкладено на горизонтальну і вертикальну складові

На рис. 3 зображено горизонтальну проекцію рис. 2,б. Векторна сума швидкостей V_A і V_B точок *A* і *B* із горизонтальними складовими $V_{гп}$ дає нові вектори $V_{Aгп}$ і $V_{Bгп}$ швидкостей цих точок. Графічним методом на перетині перпендикулярів до векторів $V_{Aгп}$ і $V_{Bгп}$ знаходимо нове положення миттєвої осі обертання, яка проходить через точку $O_г$ (рис. 3). Ця точка знаходиться на осі *OY*, оскільки складові $V_{гп}$ спрямовані паралельно осі *OX*. Величина ω кутової швидкості точок не змінилася, оскільки ми додали тільки поступальну складову. Ця складова прикладена і в точці *O*, тому можна записати $V_{гп}=OO_г\cdot\omega$. Звідси знаходимо відстань $OO_г$, на яку змістилася миттєва вісь обертання паралельно самій собі. Однак ця вісь буде одночасно ще і миттєвою віссю ковзання, оскільки вертикальні складові поступальної швидкості точок (на рис. 2,б позначені однією рискою) проекціюються на неї рівними відрізками, величину яких можна знайти із прямокутних трикутників (рис. 2,б): $V\cdot\sin\beta$. Знайдена вісь є одночасно миттєвою віссю обертання і ковзання або кінематичним гвинтом. Він характеризується співвідношенням поступальної швидкості вздовж осі і кутової навколо осі. Це відношення називається параметром *p* гвинта. Для нашого випадку $p=V\cdot\sin\beta/\omega$. Тверде тіло за проміжок часу Δt можна перевести в нове положення комбінацією обертального і поступального рухів або ж одним гвинтовим рухом за допомогою кінематичного гвинта.

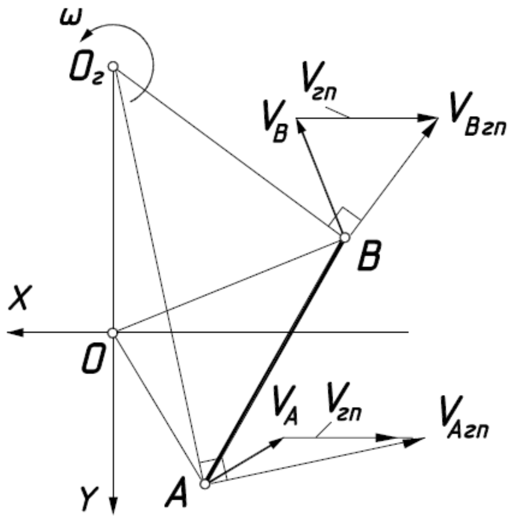


Рис. 3. До знаходження положення нової миттєвої осі обертання після надання точкам додаткової поступальної швидкості

Рух тригранника Френе по кривій можна розкласти на дві складові: обертальний навколо осі миттєвого обертання і поступальний вздовж орта дотичної. На рис. 4,а зображено тригранник Френе з вершиною A на кривій. Орти $\overline{\tau}$, $\overline{n}$, $\overline{b}$ є одиничними, тобто їх довжина рівна одиниці. Миттєвою віссю обертання тригранника є вектор Дарбу $\overline{\omega}$ [4], який розташований в спрямній площині тригранника і складає кути φ і ψ із ортом $\overline{\tau}$ і $\overline{b}$ відповідно (рис. 4,а). Напрям і величина вектора Дарбу залежить від значень кривини k і скруту σ кривої в точці A розташування тригранника, причому його проекція на орт $\overline{\tau}$ чисельно рівна скрутові σ, а на орт $\overline{b}$ - кривині k. Звідси можна знайти модуль вектора $\overline{\omega}$, тобто чисельне значення кутової швидкості ω:

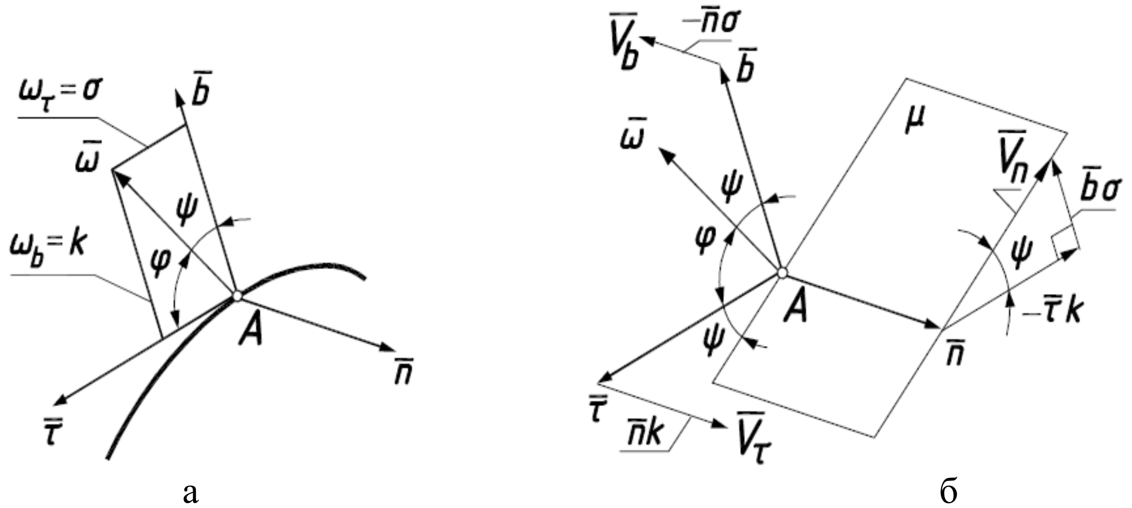
$$\left|\overline{\omega}\right| = \omega = \sqrt{k^2 + \sigma^2} \,. \tag{1}$$

Слід зазначити, що значення кутової швидкості ω (1) наведено для швидкості руху $V_A=1$ *м/с* тригранника по кривій. Для інших випадків $\omega = V_A\sqrt{k^2+\sigma^2}$, що узгоджує розмірність кутової швидкості. Цей результат у векторному вигляді наведено також у праці [1, стор. 296, формула (38)]: $\overline{\omega} = V_A(\overline{\tau}\sigma + \overline{b}k)$.

Основними формулами диференціальної геометрії, у яких незалежною змінною служить дугова координата s напрямної кривої, є формули Френе:

$$\overline{\tau}' = k\overline{n}; \qquad \overline{n}' = \sigma\overline{b} - k\overline{\tau}; \qquad \overline{b}' = -\sigma\overline{n}. \qquad (2)$$

В праці [5] розкрито кінематичну суть формул Френе, які дають можливість швидко і просто розкласти похідні будь-якого порядку від одиничних ортів $\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}$ рухомого тригранника Френе напрямної кривої на складові в проекціях на ці ж орти. В цій праці показано, що перші похідні (2) є швидкостями кінців кожного орта тригранника в його обертальному русі навколо вектора Дарбу. На рис. 4,б ці складові згідно формул (2) відкладені із кінців кожного орта. Через точку A (вершину тригранника) проведено площину μ, перпендикулярну до вектора Дарбу. Із рис. 4,б видно, що швидкості кінців ортів $\overline{\tau}$ і $\overline{b}$ паралельні площині μ, тобто перпендикулярні вектору Дарбу. Швидкість кінця орта $\overline{n}$ є сумою двох складових і розташована в площині μ, тобто теж перпендикулярна вектору Дарбу. Отже вектор Дарбу є віссю миттєвого обертання тригранника Френе без врахування його поступального руху вздовж орта $\overline{\tau}$. Для підтвердження цього ми маємо переконатися, що для всіх кінців ортів їх лінійна швидкість дорівнює добутку кутової швидкості $\sqrt{k^2+\sigma^2}$ на відстань від кінця орта до вектора Дарбу. Якщо тригранник Френе із площиною μ (рис. 4,б) повернути так, щоб орт $\overline{n}$ спроекціювався в точку, то ми отримаємо зображення, наведене на рис. 5,а.



а б

Рис. 4. Кінематична інтерпретація формул Френе:
а) положення вектора Дарбу в системі тригранника Френе;
б) векторна інтерпретація формул Френе в проекціях на орти тригранника

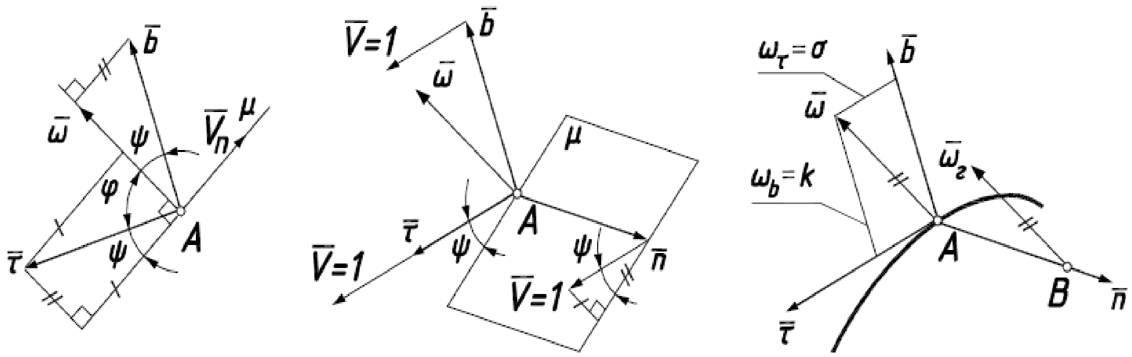
Знайдемо швидкості кінців одиничних ортів беручи до уваги те, що всі вони обертаються навколо вектора Дарбу із відомою кутовою швидкістю ω (1). Для цього потрібно знати відстань від кінця кожного орта до вектора Дарбу.

Вектор Дарбу $\overline{\omega}$ і орти $\overline{\tau}$, $\overline{b}$ лежать в спрямній площині тригранника (рис. 5,а). Із прямокутних трикутників знаходимо відстань L до вектора Дарбу (від кінця орта $\overline{\tau}$ позначено однією рискою, а від кінця орта $\overline{b}$ - двома). Ці відстані можна знайти через кути φ і ψ, для яких із рис. 4,а можна записати:

$$\sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}; \qquad \sin\psi = \frac{\sigma}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}. \qquad (3)$$

Відстані від кінців ортів до вектора Дарбу мають наступні значення (рис. 5,а):

$$L_\tau = \sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}; \qquad L_b = \sin\psi = \frac{\sigma}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}; \qquad L_n = 1. \quad (4)$$



а б в

Рис. 5. До знаходження миттєвої осі кінематичного гвинта тригранника Френе:

а) положення тригранника, при якому орт головної нормалі $\overline{\boldsymbol{n}}$ проекціюється в точку;

б) надання всім точкам тригранника поступальної швидкості $V=1$ $м/с$ в напрямі орта дотичної $\overline{\boldsymbol{\tau}}$;

в) положення миттєвої осі $\overline{\omega_г}$ кінематичного гвинта в системі тригранника Френе

Кутова швидкість обертання всіх точок тригранника має значення (1). Множенням відстаней (4) на кутову швидкість (1) ми отримаємо швидкості кінців ортів тригранника. Їх значення збігається із результатами векторного запису формул Френе (2). Отже, формули Френе описують швидкість кінця кожного орта навколо миттєвої осі обертання (вектора Дарбу) у векторному вигляді. Такий рух показано також на рис. 2,а.

Додамо тепер до всіх точок тригранника поступальну швидкість *V=1* в напрямі орта $\bar{\tau}$ (рис. 5,б). Таку операцію ми робили для точок *A* і *B* твердого тіла на рис. 2,б. В результаті цього вектор $\bar{\omega}$ зміститься вздовж орта $\bar{n}$ із точки *A* в точку *B* (рис. 5,в). Величина цього зміщення *AB* знаходиться аналогічно, як і для рис. 3, тобто *AB=V*$_{гп}$*/ω*. Величину проекції $V_{гп}$ поступальної швидкості *V=1* на площину μ знаходимо із прямокутного трикутника (рис. 5,б): $V_{ãï} = \cos\psi = k \big/ \sqrt{k^2 + \sigma^2}$. Враховуючи величину кутової швидкості ω (1), знаходимо відстань зміщення вектора $\bar{\omega}$*:*

$$AB = \frac{k}{k^2 + \sigma^2}. \tag{5}$$

Друга проекція швидкості *V=1* на вектор Дарбу є складовою швидкістю ковзання:

$$V_{\omega} = \sin\psi = \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}. \tag{6}$$

Розділивши поступальну швидкість (6) на кутову швидкість обертання (1), одержимо параметр *p* кінематичного гвинта тригранника Френе:

$$p = \frac{\sigma}{k^2 + \sigma^2}. \tag{7}$$

Отримані результати повністю збігаються із результатами, наведеними в праці [6].

Знайдемо розташування кінематичного гвинта та його параметр для супровідного тригранника Френе лінії укосу. Її параметричні рівняння одержимо із рівнянь, наведених у праці [7] при куті підйому *β=const*. Крива задана у функції довжини *s* власної дуги із заданою закономірністю зміни кривини *k=k(s)*:

$$x = \cos\beta \int \cos\left(\frac{1}{\cos\beta}\int k ds\right) ds;$$
$$y = \cos\beta \int \sin\left(\frac{1}{\cos\beta}\int k ds\right) ds; \tag{8}$$
$$z = s\sin\beta.$$

Кривина і скрут кривої укосу зв’язані між собою через кут β наступною залежністю:

$$\sigma = k\mathrm{tg}\beta. \tag{9}$$

Величина кутової швидкості обертання тригранника при русі його по кривій (8) із швидкістю *V=1 м/с* буде:

$$\omega = \sqrt{k^2 + \sigma^2} = \sqrt{k^2 + k^2\mathrm{tg}^2\beta} = \frac{k}{\cos\beta}. \tag{10}$$

Відстань *AB* і параметр *p* згідно виразів (5) і (7) набувають вигляду:

$$AB = \frac{\cos^2\beta}{k}; \qquad p = \frac{\sin\beta\cos\beta}{k}. \tag{11}$$

Якщо *k=const*, то напрямною кривою буде гвинтова лінія. Всі характеристики кінематичного гвинта супровідного тригранника матимуть сталі значення.

Висновки. Рух супровідного тригранника Френе по напрямній кривій можна вважати рухом твердого тіла в просторі за певним законом. В кожен момент часу тригранник обертається навколо миттєвої осі обертання, що проходить через його вершину, з певною кутовою швидкістю і переміщується в напрямі дотичної із поступальною швидкістю *V*. Компоненти такого руху залежать від кривини і скруту кривої в точці знаходження тригранника. Два рухи (обертальний і поступальний) можна замінити одним рухом навколо миттєвої осі обертання і ковзання, тобто замінити кінематичним гвинтом. В статті знайдено розташування миттєвої осі обертання і ковзання кінематичного гвинта через кривину і скрут напрямної кривої в точці знаходження тригранника та знайдено його параметр.

Література

1. Лойцянский Л. Г. Курс теоретической механики: в 2-х. т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – Т. 1: Статика и кинематика. – 8-е изд. – М.: Наука, 1982. – 352 с.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М.: ФМ, 1961. – 823 с.
3. Лойцянский Л. Г. Курс теоретической механики: в 2-х. т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – Т. 1: Статика и кинематика. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 379 с.
4. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 420 с.
5. Пилипака С. Ф. Кінематична інтерпретація руху супровідних тригранників Френе і Дарбу через внутрішні параметри кривих / С. Ф. Пилипака // Науковий вісник Національного аграрного університету / НАУ. – К., 1998. – Вип. 4. – С. 143-146.
6. Панчук К. Л. Элементы кинематической геометрии кривой линии / К. Л. Панчук // Омский научный вестник / ОГТУ. – Омск, 2005. – № 2 (31). – С. 68-69.
7. Войтюк Д. Г. Конструювання просторової кривої лінії із заданою кривиною, як траєкторії руху матеріальної точки / Д. Г. Войтюк, С. Ф. Пилипака // Механізація сільськогосподарського виробництва: зб. наук. праць / НАУ. – Т. 10. – К., 2001. – С. 74-78.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ ВИНТ ТРЕХГРАННИКА ФРЕНЕ

Пилипака С. Ф., Кресан Т. А., Кремец Я. С.

Аннотация

Во время перемещения твердого тела в пространстве его движение в каждый момент времени можно разложить на вращательное вокруг оси мгновенного вращения и поступательное в определенном направлении. Если в качестве тела взять сопровождающий трёхгранник Френе направляющей кривой, то характер его движения в пространстве целиком будет зависеть от дифференциальных характеристик этой кривой. Значение угловой скорости вращения, положение мгновенной оси вращения, поступательной скорости по направлению орта касательной будет зависеть от ее кривизны и кручения.

В статье графическими и аналитическими методами найдено положение мгновенной оси вращения, которая проходит через вершину трёхгранника, размер угловой скорости его вращения. Два движения - вращательное вокруг оси мгновенного вращения и поступательное в направлении орта касательной - заменены одним винтовым движением вокруг мгновенной оси вращения и скольжения. Для этого были использованы формулы Френе. Найден кинематический винт, его положение и параметр для направляющих пространственных кривых. Рассмотрен частичный случай для обобщенных кривых укоса, в частности, для винтовой линии.

Ключевые слова: трехгранник Френе, кинематический винт, вектор Дарбу, направляющая кривая, кривая укоса, кривизна, кручение.

KINEMATIC CREW OF TREE-EDGE OF FRENET

S. Pylypaka, T. Kresan, Ya. Kremetz

Summary

When moving a rigid body in space, its motion at each instant can be decomposed into a rotation around the axis of instantaneous rotation and translational motion in a certain direction. If as a solid body to take the accompanying three-edge of Frenet of a directional curve, then the character of its motion in space will depend entirely on the differential characteristics of this curve. The value of the angular speed of rotation, the position of the instantaneous axis of rotation, the translational velocity in the direction of the unit vector tangent will depend on curvature and torsion of the curve.

In the article by graphical and analytical methods have found the position of the instantaneous axis of rotation, which passes through the top of the trihedral and the magnitude of the angular velocity of it's rotation. Two motions, rotating around the axis of instantaneous rotation and moving in the direction of the tangent, are replaced by one screw motion around the instantaneous axis of rotation and sliding. To do this, the formulas of Frenet were used. The kinematic screw, its position and parameter for guides of spatial curves have found. The partial case for generalized slope curves, in particular for a screw line, have considered.

Keywords: three-edge of Frenet, the kinematic screw, vector Darby, a directing curve, curve a hay crop, curvature, torsion.